



DISERTASI- SS14 3506

ESTIMATOR GABUNGAN DERET FOURIER DAN SPLINE *TRUNCATED* DALAM REGRESI NONPARAMETRIK MULTIVARIABEL

I WAYAN SUDIARSA
NRP. 06211260010001

PROMOTOR
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

CO-PROMOTOR
Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.
Santi Wulan Purnami, S.Si., M.Si., Ph.D.

PROGRAM DOKTOR
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

LEMBAR PENGESAHAN

Disertasi disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh
gelar Doktor (Dr.)
di

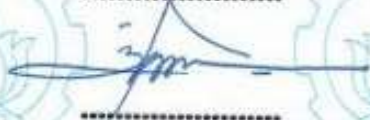
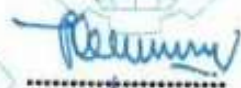
Program Doktor Departemen Statistika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
I Wayan Sudiarsa
Nrp. 06211260010001

Tanggal Ujian : 16 Juli 2018
Periode Wisuda : September 2018

Disetujui Oleh:

1. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si. (Promotor)
NIP.19650603 198903 1 003
2. Dr. Suhartono, M.Sc. (Co-Promotor)
NIP.19710929 199512 1 001
3. Santi Wulan Purnami, S.Si., M.Si., Ph.D. (Co-Promotor)
NIP. 19720923 199803 2 001
4. Prof. Akhmad Fauzy, S.Si., M.Si., Ph.D. (Penguji Eksternal)
NIP. 956110101
5. Dr. Ir. Setiawan, MS. (Penguji)
NIP. 19601030 198701 1 001
6. Dr. Muhammad Mashuri, M.T. (Penguji)
NIP. 19620408 198701 1 001
7. Dr. Dra. Ismaini Zain, M.Si. (Penguji)
NIP. 19600525 198803 2 001



Dekan Fakultas FMKSD ITS

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

ESTIMATOR GABUNGAN DERET FOURIER DAN SPLINE *TRUNCATED* DALAM REGRESI NONPARAMETRIK MULTIVARIABEL

Oleh : I Wayan Sudiarsa
Promotor : Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Co-Promotor : Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.
Santi Wulan Purnami, S.Si., M.Si., Ph.D.

ABSTRAK

Salah satu permasalahan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari adalah bagaimana menjelaskan hubungan antara suatu respon dengan beberapa prediktor. Analisis regresi merupakan metode statistika yang digunakan untuk mengestimasi pola hubungan antara respon (y) dengan prediktor (x). Pengembangan regresi nonparametrik deret Fourier yang melibatkan beberapa prediktor, selama ini lebih banyak dikembangkan untuk prediktor yang polanya sama. Perlu dikembangkan estimator yang polanya berbeda untuk beberapa prediktor pada regresi nonparametrik multivariabel. Penelitian teoritis akan difokuskan pada bentuk estimator, dan pengembangan metode untuk memilih parameter penghalus yang optimal pada estimator deret Fourier dan *truncated* spline. Hasil teoritis diaplikasikan pada data simulasi dan data produksi padi di Provinsi Bali tahun 2015. Estimasi fungsi regresi gabungan deret Fourier dan *truncated* spline, diperoleh melalui optimasi *penalized least squares* (PLS). Estimasi fungsi kurva regresi memuat estimator dan titik knot. Berdasarkan hasil simulasi diperoleh bahwa semakin besar ukuran sampel dan semakin kecil ukuran varians, maka akan menghasilkan nilai estimasi parameter dan knot yang semakin baik. Pemodelan produksi padi di Provinsi Bali menggunakan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* terbaik mempunyai GCV minimum 668466,65 dan $R^2 = 97,22\%$. Model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat sesuai untuk memodelkan produksi padi di Provinsi Bali.

Kata kunci: Deret Fourier, *Truncated* Spline, Regresi Nonparametrik, Multivariabel, *Penalized Least Squares* (PLS).

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

COMBINED ESTIMATOR FOURIER SERIES AND TRUNCATED SPLINE IN NONPARAMETRIC REGRESSION MULTIVARIABLE

Name of Student : I Wayan Sudiarsa
Promotor : Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
Co-Promotor : Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc.
Santi Wulan Purnami, S.Si., M.Si., Ph.D.

ABSTRACT

One of the problems in life is how to explain the relationship between a response with some predictors. Regression analysis is a statistical used to estimate the relation pattern between response (y) with predictor (x). The development of Fourier series in nonparametric regression involving multiple predictors has been developed for predictors of the same pattern. We need to develop estimators for different predictors of multivariable nonparametric regression. Theoretical research will be focused on the estimator and the development of methods to select the optimal parameters in estimators the fourier series and truncated spline. The results theoretical is were applied to simulation data and real data rice production in Bali Province (2015). Estimation of combined nonparametric regression of fourier series and truncated spline was obtained by optimized penalized least squares (PLS). Estimation of regression curve function contains estimator and knot point. Based on the simulation results obtained that larger the sample size and smaller the size of the variance, it will result in better parameter estimation values and knots. The modeling of rice production in Province Bali using the combined estimator of fourier series and spline truncated has a minimum GCV of 668466.65 and $R^2 = 97,22\%$. Combined models fourier series and spline truncated are well suited to model rice production in Bali Province.

Keywords: Fourier Series, Truncated Spline, Nonparametric Regression, Multivariable, Penalized Least Squares (PLS).

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

KATA PENGANTAR

Om Swastyastu,

Puja dan puji syukur penulis panjatkan kehadiran Ida Sang Hyang Widhi Wasa/Tuhan Yang Maha Esa atas berkat, rahmat dan kelancaran yang telah diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi yang berjudul: **“Estimator Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Multivariabel”**. Disertasi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Program Doktor (S3) Statistika pada Departemen Statistika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Diharapkan tulisan ini bisa menjadi salah satu acuan atau referensi bagi peneliti berikutnya maupun para praktisi yang tertarik pada kajian statistika nonparametrik, khususnya estimator gabungan yang melibatkan prediktor yang berbeda serta aplikasinya pada data produksi padi di Provinsi Bali.

Seiring dengan puji dan rasa syukur, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berjasa selama penulis menempuh pendidikan Program Doktor (S3) di Departemen Statistika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Banyak pihak yang telah dan selalu memberikan saran, bantuan, kritik, semangat dan motivasi dalam pembuatan disertasi ini. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar besarnya dengan penghargaan yang setinggi tingginya kepada :

1. Bapak Ketua Lembaga Layanan Pendidikan Tinggi (L2Dikti) Bali, NTB dan NTT. Prof. Dr. Drs. I Nengah Dasi Astawa, M.Si., yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk melanjutkan studi kejenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
2. Bapak Ketua Yayasan Perguruan Lembaga Pendidikan Perguruan Tinggi IKIP PGRI Bali, Drs. I Gusti Bagus Arthanegara, SH., M.Pd., MH., yang telah memotivasi dan memberikan kesempatan kepada penulis untuk

melanjutkan studi kejenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.

3. Bapak Sekretaris Yayasan Perguruan Lembaga Pendidikan Perguruan Tinggi IKIP PGRI Bali, I Gusti Ngurah Oka, SH., yang telah memotivasi dan memberikan kesempatan kepada penulis untuk melanjutkan studi kejenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
4. Bapak Rektor IKIP PGRI Bali. Dr. Drs. I Made Suarta, M.Hum., yang telah memotivasi dan memberikan kesempatan kepada penulis untuk melanjutkan studi kejenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
5. Bapak Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si., sebagai promotor, Bapak Dr. Suhartono, S.Si., M.Sc., serta Ibu Santi Wulan Purnami, S.Si., M.Si., Ph.D., yang telah membimbing dan mengarahkan dengan sabar dan tulus dalam penyusunan dan penyelesaian disertasi ini.
6. Bapak Prof. Akhmad Fauzy, Ph.D., sebagai penguji eksternal dari Universitas Islam Indonesia (UII) Yogyakarta yang meluangkan waktu untuk membantu memberikan saran dan pendapat guna penyempurnaan disertasi ini.
7. Bapak Dr. Ir. Setiawan, M.S., Bapak Dr. Muhammad Mashuri, M.T., serta Ibu Dr. Dra. Ismaini Zain M.Si., sebagai tim penilai yang telah banyak memberikan saran dan masukan dalam perbaikan disertasi ini.
8. Bapak/Ibu Segenap Staf Pengajar, Staf Tata Usaha dan Karyawan di Departemen Statistika FMKSD ITS Surabaya, yang telah memberikan kemudahan serta fasilitas kepada penulis dalam penyelesaian pendidikan Doktor (S3).
9. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI) Kementrian Pendidikan dan Teknologi yang telah memberikan biasiswa BPPS dan bantuan dana penelitian.
10. Ibu Dekan FPMIPA IKIP PGRI Bali. Dra. NI Nyoman Parmithi, MM., yang telah memberikan dukungan moral, semangat dan motivasi pada penulis.

11. Bapak/Ibu Rekan dosen dan tenaga pengajar di IKIP PGRI Bali, Khususnya di Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA yang telah memberikan dukungan.
12. Istri tercinta Ni Ketut Martini, SE., anak dan menantu saya Ni Putu Ayu Mirah Mariati, S.Si., M.Si., dan Made Ary Januardana, ST., Ni Made Sukma Sanjiwani, S.Si., M.Si., dan Ni Komang Indra Mahayani, ST., serta cucu I Putu Kiano Damahesa Kepakisan yang dengan setia dan sabar dalam memberikan motivasi, semangat dan doa demi terselesainya disertasi ini.
13. Kedua Orang Tua saya Bapak (Alm) I Wayan Cangker dan Ibu (Alm) Ni Wayan Masih, serta mertua saya Bapak (Alm) I Wayan Suta dan Ibu (Alm) Ni Wayan Roji yang selalu memberi semangat dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan disertasi ini.
14. Rekan seangkatan 2012 yang menyemangati hingga tulisan ini terselesaikan, serta segenap rekan mahasiswa Program Doktor (S3) Statistika ITS angkatan 2006-2017 yang telah memberikan dukungan semangat pada penulis.
15. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu oleh penulis, terima kasih atas semua dukungan dan semangat moral yang diberikan.

Penulis menyadari bahwa penyusunan disertasi ini masih jauh dari kesempurnaan. Karena sebagai manusia biasa tidak luput dari berbagai kekurangan atau keterbatasannya. Disertasi ini juga tak luput dari pepatah, “Tak ada gading yang tak retak”. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang konstruktif dan membangun agar disertasi ini menjadi lebih baik.

Om Shanti, Shanti, Shanti Om

Surabaya, Juli 2018

Penulis

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
DAFTAR LAMBANG DAN ARTI	xxiii
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	8
1.3 Tujuan Penelitian	9
1.4 Manfaat Penelitian	9
1.5 Orisinalitas dan Kontribusi Penelitian	9
1.6 Batasan Masalah.....	13
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	15
2.1 Model Regresi Parametrik	15
2.2 Model Regresi Nonparametrik	16
2.3 Metode Penaksir Parameter dalam Regresi Nonparametrik	17
2.3.1 Kernel.....	18
2.3.2 Spline	18
2.3.3 Wavelet	19
2.3.4 Deret Fourier	19
2.3.3 Polinomial Lokal.....	20

2.4	Pemilihan Parameter Penghalus.....	20
2.5	Regresi Nonparametrik Deret Fourier	21
2.5.1	Estimator Deret Fourier dengan Trend dalam Regresi Nonparametrik Univariabel	23
2.5.2	Estimator Deret Fourier dengan Trend dalam Regresi Nonparametrik Multivariabel	25
2.6	Regresi Nonparametrik Spline.....	26
2.6.1	Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Univariabel	29
2.6.2	Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Multivariabel	31
2.7	Model <i>Additive</i> dalam Regresi Nonparametrik	32
2.8	Ukuran Kesesuaian Model.....	33
2.9	Uji Deteksi Non linear dengan Uji Terasvirta	34
2.10	Pemodelan Produksi Padi di Provinsi Bali	35
2.10.1	Produksi Padi di Provinsi Bali.....	35
2.10.2	Iklim dan Tanaman Padi.....	37
BAB 3	METODELOGI PENELITIAN	41
3.1	Langkah-Langkah Kajian Teoritis.....	42
3.2	Memilih Parameter Penghalus Optimal.....	43
3.3	Langkah-Langkah Kajian Teoritik pada Data Simulasi	43
3.4	Langkah-Langkah Kajian Teoritik pada Data Produksi Padi di Provinsi Bali	45
3.4.1	Data Penelitian.....	45
3.4.2	Definisi Operasional Variabel	46
3.4.3	Langkah-Langkah Analisis.....	48
BAB 4	ESTIMASI PARAMETER GABUNGAN DERET FOURIER DAN SPLINE <i>TRUNCATED</i>	49
4.1	Model Regresi Nonparametrik Gabungan Deret Fourier dan Spline <i>Truncated</i>	49
4.2	Bentuk Estimator Gabungan Deret Fourier dan Spline	

<i>Truncated</i> dalam Regresi Nonparametrik	53
4.3 Pemilihan Parameter Penghalus dan Titik Knot Optimaal	66
BAB 5 EVALUASI PENAKSIR PARAMETER MODEL SIMULASI	69
5.1 Model Fungsi M_{11}	74
5.2 Model Fungsi M_{12}	89
5.3 Model Fungsi M_{13}	102
5.4 Model Fungsi M_{21}	103
5.5 Model Fungsi M_{22}	105
5.6 Model Fungsi M_{23}	106
5.7 Model Fungsi M_{31}	108
5.8 Model Fungsi M_{32}	110
5.9 Model Fungsi M_{33}	111
5.10 Kesimpulan Hasil Simulasi	114
BAB 6 HASIL PEMODELAN PRODUKSI PADI DI PROVINSI BALI ..	115
6.1 Diskripsi Data Produksi Padi	115
6.2 Uji Non Linearitas.....	120
6.3 Pemodelan Produksi Padi Menggunakan Estimator Gabungan	
Deret Fourier dan Spline <i>Truncated</i>	121
6.4 Pemodelan Produksi Padi Menggunakan Deret Fourier	124
6.5 Pemodelan Produksi Padi Menggunakan Spline <i>Truncated</i>	125
6.6 Pemilihan Model Gabungan Deret Fourier dan Spline <i>Truncated</i>	
Terbaik.....	127
6.7 Interpretasi Model Regresi Nonparametrik Multivariabel	
Gabungan Deret Fourier dan Spline <i>Truncated</i> Terbaik.....	130
BAB 7 KESIMPULAN, SARAN DAN KEBERLANJUTAN	137
7.1 Kesimpulan	137
7.2 Saran.....	139
7.3 Keberlanjutan	139
DAFTAR PUSTAKA	141
LAMPIRAN.....	147

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1.1 Roadmap Penelitian.....	12
Gambar 2.1 Fungsi Deret Fourier	24
Gambar 2.2 Fungsi Spline <i>Truncated</i>	27
Gambar 3.1 Tahapan Penelitian	41
Gambar 5.1 Fungsi Deret Fourier $K=1$ (a), $K=2$ (b), dan $K=3$ (c).....	73
Gambar 5.2 Fungsi Spline <i>Truncated</i> Satu Titik Knot (a), Dua Titik Knot (b), dan Tiga Titik Knot (c).....	74
Gambar 5.3 Plot antara dengan (a), dan dengan (b).....	74
Gambar 5.4 Scatterplot dengan dan (a), dan Kurva Regresi (b)	75
Gambar 5.5 Plot GCV dari Model Fungsi	76
Gambar 5.6 Plot model regresi M_{11} berdasarkan λ optimal dan GCV minimum.	77
Gambar 5.7 Ketepatan Model untuk ukuran sampel n (a), dan Estimasi b (b)...	81
Gambar 5.8 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).....	81
Gambar 5.9 Estimasi β (a), Estimasi titik knot t (b), dan Estimasi α_1 (c).....	82
Gambar 5.10 Ketepatan Model untuk σ^2 (a), dan Estimasi b (b)	83
Gambar 5.11 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)	83
Gambar 5.12 Estimasi β (a), Estimasi α_1 (b), dan Estimasi Titik Knot t (c)..	84
Gambar 5.13 Ketepatan Model untuk K (a), dan Estimasi b (b).....	85
Gambar 5.14 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)	85
Gambar 5.15 Estimasi β (a), Estimasi α_1 (b), dan Estimasi Knot t (c)	86
Gambar 5.16 Estimasi Ketepatan Model untuk Knot t (a), dan Estimasi b (b)...	87
Gambar 5.17 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)	87
Gambar 5.18 Estimasi β (a), Estimasi α_1 (b), dan Estimasi Knot t (c)	88
Gambar 5.19 Plot Model Regresi f (a), Model Regresi \hat{f} (b), dan Model Regresi f dengan \hat{f} (c)	89

Gambar 5.21 Ketepatan Model untuk n (a), dan Estimasi b (b).....	91
Gambar 5.22 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).....	92
Gambar 5.23 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b)	92
Gambar 5.24 Estimasi α_2 (a), Estimasi t_1 (b), dan Estimasi t_2 (c)	93
Gambar 5.25 Ketepatan Model untuk σ^2 (a), dan Estimasi b (b).	94
Gambar 5.26 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).....	94
Gambar 5.27 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b)	95
Gambar 5.28 Estimasi α_2 (a), Estimasi titik knot t_1 (b), dan Estimasi titik knot t_2 (c).....	96
Gambar 5.29 Ketepatan Model untuk K (a), dan Estimasi b (b)	97
Gambar 5.30 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).....	97
Gambar 5.31 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b)	98
Gambar 5.32 Estimasi α_2 (a), Estimasi titik knot t_1 (b), dan Estimasi titik knot t_2 (c).....	99
Gambar 5.33 Ketepatan Model terhadap knot t (a), dan Estimasi b (b)	99
Gambar 5.34 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)	100
Gambar 5.35 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b).	101
Gambar 5.36 Estimasi α_2 (a), Estimasi t_1 (b), dan Estimasi t_2 (c)	101
Gambar 6.1 <i>Scatter plot</i> Produksi Padi y dengan Luas Panen x_1	117
Gambar 6.2 <i>Scatterplot</i> Produksi Padi y dengan Curah Hujan x_2	118
Gambar 6.3 <i>Scatterplot</i> Produksi Padi y dengan Suhu x_3	119
Gambar 6.4 <i>Scatterplot</i> Produksi Padi y dengan Kecepatan Angin x_4	120
Gambar 6.5 Produksi Padi Aktual (y) dan Produksi Padi Prediksi (\hat{y})	134

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Struktur Data Produksi Padi di Provinsi Bali	46
Tabel 5.1 Fungsi Deret Fourier $f_{1K}(x_1)$ dan Fungsi Spline <i>Truncated</i> $f_{2r}(x_2)$	71
Tabel 5.2 Parameter Fungsi Deret Fourier $f_{1K}(x_{1i})$	72
Tabel 5.3 Parameter Fungsi Spline <i>Truncated</i> $f_{2r}(x_{2i})$	72
Tabel 5.4 Nilai <i>GCV</i> , Parameter Penghalus λ optimal, R^2 dan <i>MSE</i> Fungsi M_{11}	76
Tabel 5.5 Estimasi Parameter dan Knot Model Persamaan Fungsi M_{11}	78
Tabel 5.6 Estimasi Parameter dan Knot Model Persamaan Fungsi , $n = 100$	79
Tabel 5.7 Estimasi Parameter dan Knot Model Persamaan Fungsi , $n = 200$	80
Tabel 5.22 Ketepatan Model, Nilai <i>GCV</i> , λ optimal, R^2 dan <i>MSE</i> Fungsi M_{11}	113
Tabel 6.1 Deskripsi Statistika Variabel Penelitian pada Data Riil.....	116
Tabel 6.2 Uji Non-Linieritas Terasvirta Neural Netwok Test pada Data Riil	121
Tabel 6.3 <i>GCV</i> Minimum Model Gabungan Dua Prediktor Spline <i>Truncated</i> dan Dua Prediktor Deret Fourier	122
Tabel 6.4 <i>GCV</i> Minimum untuk Model Gabungan Dua Prediktor Spline <i>Truncated</i> dan Dua Prediktor Deret Fourier.....	123
Tabel 6.5 <i>GCV</i> Minimum Model Deret Fourier dengan Empat Prediktor Deret <i>Fourier</i>	125
Tabel 6.6 <i>GCV</i> Minimum Model Spline <i>Truncated</i> dengan Empat Prediktor <i>Spline Truncated</i>	126
Tabel 6.7 <i>GCV</i> Minimum Model Gabungan Deret Fourier dan Spline <i>Truncated</i>	127
Tabel 6.8 <i>GCV</i> Minimum Model Produksi Padi Terbaik	128
Tabel 6.9 Estimasi Parameter Model Gabungan Deret Fourier dan Spline Truncated Terbaik.....	129
Tabel 6.10 Produksi Padi Aktual y dengan Prediksi Produksi Padi \hat{y}	133

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Data Hasil Simulasi	147
Lampiran 2 Plot Data X vs Y	160
Lampiran 3 <i>Scatterplot</i> Data Simulasi	167
Lampiran 4 Plot 3D Data Simulasi	171
Lampiran 5 Program Simulasi	175
Lampiran 7 Model M_{13}	217
Lampiran 9 Model M_{21}	222
Lampiran 11 Model M_{22}	226
Lampiran 13 Model M_{23}	231
Lampiran 15 Model M_{31}	237
Lampiran 20 Program Data Riil	238
Lampiran 21 Data Produksi Padi	269
Lampiran 23 GCV Minimum Dua Prediktor Spline dan Dua Prediktor Deret Fourier	270
Lampiran 24 GCV Minimum Satu Prediktor Deret Fourier dan Tiga Prediktor Spline	271
Lampiran 25 GCV Minimum Tiga Prediktor Deret Fourier dan Sisanya Spline	275
Lampiran 26 Riwayat Peneliti	277

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

DAFTAR LAMBANG DAN ARTI

y_i	: Respon dari Subyek ke i , $i = 1, 2, \dots, n$.
x_{ri}	: Prediktor ke r , dari Subyek ke i untuk $r = 1, 2, \dots, p$ dan $i = 1, 2, \dots, n$
ε_i	: <i>Error</i> Random dari Subyek ke $i = 1, 2, \dots, n$.
p	: Banyaknya Prediktor.
OLS	: <i>Ordinary Least Squares</i> .
$f_k(x_k)$: Kurva Regresi Prediktor ke k , $k = 1, 2, \dots, q$.
q	: Banyaknya Prediktor.
PLS	: <i>Penalized Least Squares</i> .
λ	: Parameter Penghalus.
W_i	: Parameter Pembobot ke i .
K	: Osilasi Pengulangan yang Terjadi pada Deret Fourier.
\mathbf{D}	: Matriks Diagonal.
f_j	: Kurva Regresi ke j .
W_2^m	: Ruang Sobolev yang didefinisikan sebagai $\{f : f^{(j)} \text{ kontinu absolut}$ pada $[a, b]$ dan $f^m \in L_2[a, b]\}$ adalah himpunan fungsi kuadrat yang Terintegral pada interval $[a, b]$
CV	: <i>Cross Validation</i> .
GCV	: <i>Generalized Cross Validation</i> .
MSE	: <i>Mean Square Error</i> .
R^2	: Koefisien Determinasi.
$\mathbf{H}(\lambda)$: Matriks Hessian Penghalus λ .
$\mathbf{V}(\lambda)$: Matriks Vektor Penghalus λ .
\mathbf{I}	: Matriks Identitas.
\mathbf{W}	: Matriks dalam Model Regresi Nonparametrik Prediktor Deret Fourier.
$\mathbf{X}_j(\mathbf{t})$: Matriks dalam Model Regresi Nonparametrik Variabel Spline <i>Truncated</i> .

- \mathbf{a} : Vektor Parameter (Koefisien Regresi) dari Model Deret Fourier.
- β_j : Vektor Parameter (Koefisien Regresi) dari Model Spline *Truncated*.
- \mathbf{t}_j : Vektor Knot dari Model Spline *Truncated*.
- $R(\mathbf{f})$: *Goodness Of Fit*.
- $J(f_1)$: Kemulusan Fungsi Penalty.
- M_{Kr} : Model Gabungan Deret Fourier dengan K Banyaknya Osilasi dan Spline *Truncated* Linear dengan r Banyaknya Titik Knot
- M_{11} : Model Gabungan Deret Fourier dengan Satu Osilasi dan Spline *Truncated* Linear Satu Titik Knot.
- M_{22} : Model Gabungan Deret Fourier dengan Dua Osilasi dan Spline *Truncated* Linear Dua Titik Knot.
- M_{33} : Model Gabungan Deret Fourier dengan Tiga Osilasi dan Spline *Truncated* Linear Tiga Titik Knot.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu metode yang banyak dikaji oleh peneliti statistik adalah analisis regresi. Secara umum analisis regresi adalah suatu metode statistik yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara suatu respon dengan satu atau lebih prediktor. Regresi parametrik merupakan metode statistika yang digunakan untuk pemodelan hubungan antar variabel, jika bentuk hubungan fungsionalnya diketahui atau diasumsikan mengikuti fungsi tertentu. Regresi parametrik mempunyai sifat sederhana, sangat populer dan mempunyai interpretasi baik. Perkembangann regresi parametrik secara umum terdiri dari dua kelompok model, yaitu model regresi linier dan model regresi nonlinier.

Regresi parametrik dalam praktik sering kali tidak sesuai untuk merepresentasikan hubungan antara respon dan prediktor yang disebabkan tidak diketahuinya bentuk hubungan fungsional kedua variabel. Pada dekade terakhir ini telah banyak dilakukan kajian tentang regresi nonparametrik yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara respon dan prediktor ketika informasi hubungan fungsionalnya tidak diketahui. Seiring dengan berkembangnya komputasi dan beberapa keterbatasan pada model regresi parametrik maka model regresi nonparametrik yang tidak memerlukan banyak asumsi menjadi lebih banyak digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan di berbagai bidang terapan. Regresi nonparametrik memiliki kemampuan dalam mencari bentuk pola kurva regresi yang tidak/belum diketahui bentuknya. Kemampuan ini didukung oleh adanya parameter pada setiap jenis metode regresi nonparametrik yang membuat estimasi kurva regresi menjadi lebih fleksibel. Parameter tersebut diantaranya adalah knot dalam metode estimasi spline *truncated* dan osilasi sebanyak K pada metode astimasi deret Fourier (Mahler, 1995).

Model regresi nonparametrik dalam perkembangannya sampai saat ini ada 5 (lima) estimator yaitu kernel, spline, polinomial lokal, wavelet, dan deret Fourier. Beberapa penelitian yang berkaitan dengan estimator-estimator tersebut dapat dilihat pada Manzana dan Zerom (2005), Okumura dan Naito (2006), Yao (2007), You dan Chen (2007), serta Kayri dan Zirhhoglu (2009) untuk estimator kernel, Craven dan Wahba (1979), Wahba (1990), Green dan Silverman (1994), Eubank (1988), Liang (2006), Lin dan Zhang (2006), serta Budiantara *et.al* (2010) untuk estimator spline, Welsh dan Yee (2006), Sua dan Ullah (2008), He dan Huang (2009), Martins-Filho dan Yao (2009), serta Qingguo (2010) untuk estimator polinomial lokal, Antoniadis, Bigot, dan Spatinas (2001), Amato dan De-Canditiis (2001), Li (2002), Angelini, De-Canditiis, dan Lebnac (2003), Qu (2003), Rakotomamonjy, Mary, and Canu (2005), serta Taylor (2009) untuk estimator wavelet, dan De Jong (1977), Bilodeau (1992), Amato dan De-Canditiis (2001), Oirrak (2001), Amato, Antoniadis, dan De-Feis (2002), Faber (2004), Silverberg (2007), Tripena dan Budiantara (2007), serta Galtchouk dan Pergamenshchikov (2009) untuk estimator deret Fourier.

Kernel merupakan estimator yang pada awalnya banyak digunakan dalam regresi nonparametrik. Nadaraya (1964) dan Watson (1964) merupakan kelompok peneliti pertama yang membahas tentang regresi kernel. Setelah itu banyak penelitian berkaitan dengan pengembangan regresi kernel, antara lain Okumura dan Naito (2006) yang mengkaji tentang konstruksi estimator fungsi regresi dengan meminimumkan suatu fungsi lokal, dan Yao (2007) yang telah menurunkan distribusi asimtotik dari estimator kernel dengan menggunakan rata-rata terbobot untuk data longitudinal. Selain itu, Kayri dan Zirhlioglu (2009) meneliti tentang estimator kernel untuk melihat hubungan antara tingkat ketergantungan internet (sebagai variabel respon) dengan lamanya penggunaan internet setiap hari (sebagai variabel prediktor) di sekolah menengah.

Spline sebagai pendekatan pola data dikenalkan oleh Whittaker pada tahun 1923. Spline yang didasarkan pada suatu persoalan optimasi dikembangkan oleh Reinsch pada tahun 1967 (Wahba, 1990). Pendekatan spline mempunyai suatu basis

fungsi. Basis fungsi yang biasa digunakan antara lain spline *truncated* dan B-spline (Lyche dan Morken, 2004). Spline *truncated* merupakan fungsi dimana terdapat perubahan pola perilaku kurva yang berbeda pada interval-interval yang berlainan. Spline adalah salah satu bentuk estimator yang cukup populer, seringkali digunakan dalam regresi nonparametrik karena mempunyai interpretasi visual yang baik, fleksibel, serta mampu menangani karakter fungsi yang bersifat mulus (Eubank, 1999; Budiantara, 2007). Kelebihan spline mempunyai interpretasi statistka yang baik dan dapat menangani data yang berubah-ubah pola pada sub interval yang berlainan, serta mempunyai sifat penduga sama dengan regresi parametrik. Disamping kelebihan spline juga mempunyai kelemahan, kadang-kadang menghasilkan matriks koefisien singular tidak punya invers, akibatnya estimator tersebut sulit didapat. Bentuk kurva regresi spline sangat dipengaruhi oleh parameter penghalus. Perkembangan selanjutnya yang mengkaji tentang fungsi spline dalam regresi nonparametrik multivariabel diantaranya Craven dan Wahba (1979) melakukan kajian tentang metode *cross validation* (CV) untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator spline. Selain itu, Wahba (1990) mengkaji tentang metode untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator spline, yaitu metode *Generalized Cross Validation* (GCV). Budiantara (2000) dalam perkembangannya telah melakukan kajian metode GCV dari Wahba (1990) untuk estimator spline terbobot dan memperlihatkan sifat optimal asimtotik metode ini masih berlaku untuk estimator spline terbobot.

Pada perkembangannya, estimator lain yang juga digunakan dalam regresi nonparametrik adalah polinomial lokal. Beberapa penelitian tentang polinomial lokal diberikan oleh Welsh dan Yee (2006) yang mengkaji tentang penggunaan polinomial lokal pada regresi nonparametrik dengan variabel respon lebih dari satu. Pada kajiannya, Welsh dan Yee (2006) telah menurunkan sifat bias dan varians asimtotik dari estimator polinomial lokal tersebut. Metode tersebut kemudian diterapkan pada data tekanan darah untuk 600 orang buruh di New Zealand. Selain itu, He dan Huang (2009) juga mengkaji tentang estimator linier lokal penghalusan

ganda (*double-smoothing*) yang dikonstruksi melalui kombinasi secara integral semua nilai taksiran pada x dari garis lokal dalam persekitarannya dengan penghalusan untuk nilai sekitar lainnya. Hasil kajian He dan Huang (2009) pada studi simulasi dan data real menunjukkan bahwa regresi linier lokal penghalusan ganda seringkali memberikan hasil yang lebih baik dibanding dengan regresi lokal linier.

Pada dekade terakhir ini, wavelet juga banyak digunakan sebagai estimator model regresi nonparametrik. Kajian tentang wavelet pada regresi nonparametrik antara lain dapat dilihat pada Antoniadis *et al.* (2001) yang membahas tentang metode wavelet untuk memodelkan observasi dari suatu signal yang terkontaminasi oleh gangguan (*noise*) yang berdistribusi Gauss dan bersifat aditif. Dalam makalahnya, Antoniadis *et al.* (2001) juga memberikan review lengkap tentang estimator wavelet yang dikembangkan untuk data yang terkontaminasi gangguan tersebut. Selain itu, Rakotomamonjy *et al.* (2005) telah memperkenalkan suatu metode untuk mengkonstruksi suatu kernel wavelet pada ruang Hilbert untuk regresi nonparametrik ketika titik-titik samplingnya tidak sama lebarnya. Hasil kajian Rakotomamonjy *et al.* (2005) pada data simulasi dan data riil menunjukkan efektivitas dari penggunaan kernel wavelet tersebut.

Perkembangan terakhir berkaitan dengan penelitian tentang model regresi nonparametrik menunjukkan bahwa deret Fourier merupakan salah satu estimator alternatif yang banyak dikaji dan dikembangkan oleh peneliti regresi nonparametrik. De Jong (1977) merupakan kelompok peneliti awal yang mengkaji tentang transformasi deret Fourier untuk penghalusan fungsi densitas, khususnya pada penghalusan estimator spektral. Pada tahun 1992, Bilodeau mengkaji tentang estimator deret Fourier pada regresi nonparametrik dengan komponen prediktor yang aditif dan *Penalized Least Squares* untuk mendapatkan koefisien-koefisiennya. Estimator deret Fourier yang digunakan adalah jumlahan dari suatu fungsi linier dan suatu fungsi polinomial trigonometri. Amato dan De-Canditiis (2001) telah mengkaji metode regularisasi wavelet dan Fourier pada permasalahan regresi nonparametrik.

Membuktikan bahwa fungsi kerugian (*loss function*) yang dievaluasi untuk parameter regularisasi yang ditentukan melalui *GCV* dan kriteria Mallows adalah ekuivalen asimptotis terhadap nilai minimum pada parameter regularisasi tersebut. Selanjutnya, Amato, Antoniadis, dan De-Feis (2002) juga menunjukkan bahwa estimator deret Fourier dalam model regresi nonparametrik aditif memberikan optimasi terbaik antara ketepatan dan biaya komputasi. Selain itu, Oirrak (2001) menyatakan bahwa deret Fourier memberikan estimasi secara menyeluruh dalam ruang dimensi dua dan bergerak secara perlahan.

Peneliti lain yang mengkaji regresi nonparametrik dengan menggunakan deret Fourier adalah Faber (2004) yang mengaplikasikan pada permasalahan data scanning radiografi dari pengapuran tulang pasien. Silverberg (2007) menunjukkan bahwa karakteristik konvergensi estimator deret fourier meningkat secara signifikan dalam masalah ruang dimensi satu dan dua. Selain itu, Galtchouk dan Pergamenshchikov (2009) memperkenalkan suatu prosedur yang adaptif untuk mengestimasi suatu regresi nonparametrik yang tidak diketahui. Mereka menunjukkan bahwa prosedur tersebut adalah efisien secara asimptotis untuk resiko kuadratik.

Eubank (1988) menyatakan bahwa deret Fourier merupakan salah satu model yang mempunyai interpretasi statistika dan interpretasi visual yang baik diantara model-model regresi nonparametrik tersebut. Kelebihan estimasi deret fourier mampu menangani karakter data yang mengikuti pola berulang pada trend interval tertentu, serta mempunyai interpretasi statistika yang baik. Disamping mempunyai kelebihan estimasi deret Fourier juga mempunyai kelemahan, tidak bisa menangani data kalau tidak berulang, komplikated dan rumit, karena mengandung fungsi sinus dan cosinus, serta memuat parameter osilasi yang sulit diinterpretasikan (Bilodeau, 1992). Pengembangan regresi nonparametrik deret Fourier pada beberapa variabel prediktor secara bersama-sama yang telah dilakukan oleh Bilodeau (1992) menggunakan estimator deret Fourier untuk semua prediktor dalam bentuk model yang *additive*. Bentuk model regresi nonparametrik dengan banyak prediktor (multivariabel) yang *additive* telah banyak dikembangkan pada beberapa variabel prediktor yang dikenal

dengan *Generalized Additive Model* atau *GAM* (Hastie dan Tibshirani, 1990). Salah satu pertanyaan terbuka yang muncul dari penelitian Bilodeau (1992) adalah adanya peluang untuk dikembangkan estimator yang berbeda untuk setiap prediktor pada regresi nonparametrik yang melibatkan banyak prediktor.

Sampai dengan saat ini penelitian berkaitan dengan regresi nonparametrik yang melibatkan banyak prediktor hanya terbatas pada pemakaian jenis estimator yang sama untuk setiap prediktornya. Craven dan Wahba (1979), Wahba (1990), dan Budiantara (2000) mengembangkan model regresi nonparametrik multivariabel dengan menggunakan metode penaksiran spline untuk seluruh variabel prediktornya. Bilodeau (1992), Daneela dan Candities (2004), Silverberg (2007), dan Tripena dan Budiantara (2007) mengembangkan model regresi nonparametrik multivariabel dengan menggunakan metode penaksiran deret Fourier untuk seluruh variabel prediktornya. Ada peluang memungkinkan dalam model regresi nonparametrik multivariabel sebagian menggunakan metoda penaksir spline dan sebagian menggunakan deret Fourier.

Sebagai contoh, dalam pemodelan produksi padi yang mempertimbangkan variabel prediktor luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin misalnya, penelitian awal mengindikasikan bahwa luas panen memiliki pola perubahan tidak berulang pada setiap interval, sedangkan curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin memiliki pola perubahan yang berulang pada setiap interval. Halmar *et al.* (2012) dan Laoh *et al.* (2015) melakukan penelitian produksi padi dengan variabel prediktor luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin mempergunakan model regresi linear berganda mendapatkan nilai rata-rata determinasi $R^2 = 68,03\%$. Luas panen sebagai variabel prediktor dalam penelitian Laoh *et al.* (2015) dalam setiap wilayah berbeda-beda. Hal ini mengindikasikan bahwa pola luas panen berubah pada setiap wilayah tertentu. Sebaiknya luas panen sebagai variabel prediktor dalam penelitian menggunakan pendekatan spline *trunceted*, karena spline merupakan suatu pola data yang mempunyai sifat berubah-ubah pada interval yang berlainan. Halmar *et al.*

(2012) curah hujan yang merupakan variabel prediktor dalam penelitiannya mempunyai pola berulang atau musiman pada interval tertentu. Sebaiknya untuk mengestimasi parameter tersebut digunakan pendekatan deret Fourier. Oleh karena itu, dalam pemodelan produksi padi tersebut pola perubahan yang berbeda pada variabel prediktornya perlu dipertimbangkan dengan menggunakan metode estimasi yang berbeda. Pola perubahan tidak berulang pada variabel prediktor estimasi parameternya dapat didekati dengan metode spline, sedangkan pola perubahan berulang pada variabel prediktor estimasi parameternya dapat didekati dengan metode deret Fourier.

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, maka akan dilakukan pengembangan estimator regresi nonparametrik yang berbeda-beda untuk masing-masing prediktor. Fokus penelitian ditekankan pada model regresi nonparametrik yang *additive* dengan gabungan antara deret Fourier dan *truncated* spline yang diperoleh melalui optimasi *Penalized Least Squares (PLS)*. Penelitian ini juga di fokuskan pada penanganan karakter data yang mengikuti pola berulang pada interval tertentu dan mempunyai pola berubah-ubah pada sub-sub interval yang berlainan. Kelebihan dari penelitian gabungan deret Fourier dan spline *truncated* mempunyai interpretasi dan prediksi yang diharapkan lebih baik, serta mampu menangani karakter data yang mengikuti pola baik berulang maupun berubah pada sub-sub interval tertentu.

Hasil pengembangan diaplikasikan pada studi empiris yang mencakup studi simulasi untuk menyelidiki kebaikan dari kurva regresi yang dihasilkan dan studi terapan pada suatu permasalahan nyata, yaitu pemodelan produksi padi di Provinsi Bali. Produksi padi saat ini mengalami pergeseran maupun penurunan. Indonesia yang dulunya sebagai *net food exporter* berubah menjadi *net food importer*. Provinsi Bali merupakan bagian dari Negara Republik Indonesia juga mengalami penurunan Produksi padi. Hal ini disebabkan karena adanya alih fungsi (konversi) lahan kepegunungan non pertanian, tanah pertanian produktif menjadi bangunan tempat pemukiman dan hotel. Selain adanya konversi lahan pertanian, ketersediaan gabah atau beras juga dipengaruhi oleh laju pertumbuhan penguasaan lahan sawah oleh

petani padi. Hal ini akan berdampak pada penurunan luas panen padi (Mudakir, 2011).

Disamping kepemilikan lahan yang akan berdampak pada luas panen, produksi padi juga dipengaruhi oleh faktor iklim yang meliputi curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Tanaman dipandang sebagai suatu yang kompleks dan peka terhadap pengaruh iklim misalnya pemanasan, kelembaban, penyinaran matahari dan lain-lain. Pada umumnya pertumbuhan tanaman akan tertahan, meskipun ada beberapa tanaman yang dapat menyesuaikan diri untuk dapat hidup dalam periode yang cukup lama. Aplikasi meteorologi sangat penting dalam bidang agrokultur, sejak dulu kegiatan pertanian bergantung pada cuaca. Banyak manfaat yang dapat kita peroleh dari aplikasi meteorologi. Salah satu contohnya dalam penelitian (Firmansyah, 2011) aplikasi meteorologi pada produktivitas tanaman padi. Naik turunnya produksi padi di Provinsi Bali sulit diprediksi, oleh karena selalu berubah-ubah pada setiap panen. Hal ini memerlukan metode statistika yang tepat untuk memprediksi produksi padi.

Penelitian awal dalam disertasi ini dimulai dengan kajian teori untuk mendapatkan estimasi kurva regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated*. Kajian berikutnya adalah menerapkan hasil kajian teoritik pada data simulasi untuk mengetahui kebaikan model yang diperoleh. Kajian akhir dilakukan dengan menerapkan model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* pada data riil yaitu untuk pemodelan produksi padi di Provinsi Bali.

1.2 Perumusan Masalah

Dari uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah penelitian ini sebagai berikut.

1. Bagaimana mengembangkan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif?
2. Bagaimana mengevaluasi penerapan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif menggunakan data simulasi?

3. Bagaimana penerapan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam pemodelan produksi padi berdasarkan variabel luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah dirumuskan di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengembangkan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif.
2. Mengevaluasi penerapan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif memakai data simulasi.
3. Menerapkan estimator gabungan deret Fourier dan *Truncated* spline dalam pemodelan produksi padi berdasarkan variabel luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini terbagi atas dua sisi yaitu dari sisi statistika dan sisi terapan. Manfaat penelitian dari sisi statistika adalah memberikan kontribusi teori bagi pengembangan model regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated*. Manfaat penelitian dari sisi terapan adalah memberikan kontribusi bagi pemodelan data produksi padi di Provinsi Bali. Kontribusi ini diharapkan dapat memberikan sumbangsih bagi pertimbangan pemerintah dalam penentuan kebijakan pembangunan untuk kesejahteraan rakyat, melalui peningkatan produksi padi.

1.5 Orisinalitas dan Kontribusi Penelitian

Penelitian yang menyangkut estimator deret Fourier dalam regresi nonparametrik pada dasarnya belum banyak dikembangkan oleh para peneliti.

Seperti diketahui bahwa dalam model regresi nonparametrik, akan dilakukan estimasi fungsi dengan menggunakan deret Fourier pada komponen nonparametriknya. Estimator deret Fourier ini, umumnya digunakan apabila data yang diselidiki polanya tidak diketahui dan ada kecendrungan mempunyai pola berulang atau musiman (Tripena dan Budiantara, 2007 dan Bilodeau, 1992). Dalam estimator deret Fourier, kurva regresi nonparametrik f diasumsikan tidak diketahui dan termuat di dalam ruang fungsi kontinu $C(0, \pi)$. Estimator deret Fourier bertujuan untuk mendapatkan estimasi kurva fungsi regresi nonparametrik. Selanjutnya untuk mendapatkan estimator deret Fourier yang sesuai dilakukan pemilihan parameter penghalus yang optimal.

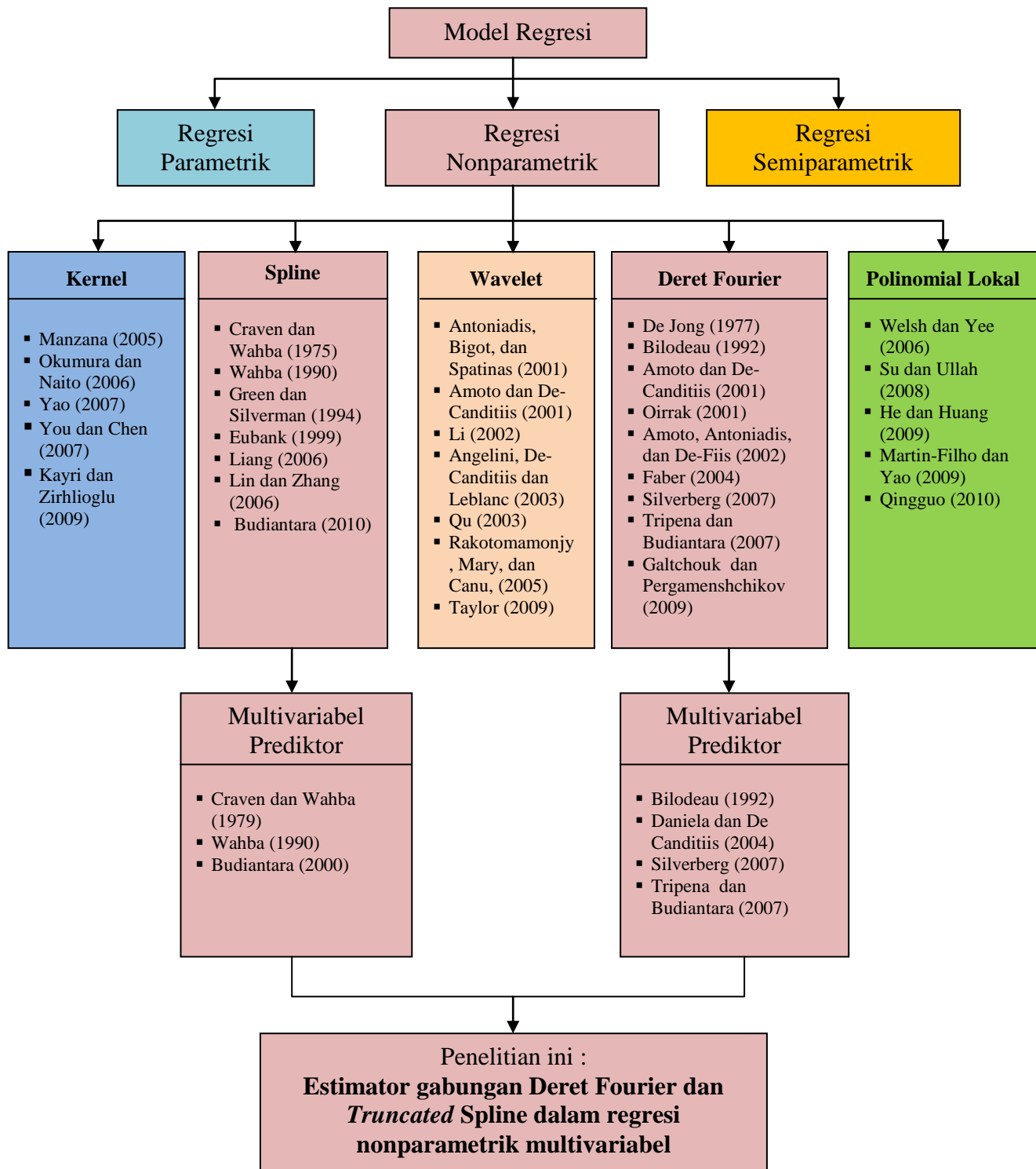
Beberapa peneliti model regresi nonparametrik telah membahas tentang deret Fourier, seperti De Jong (1977) menyelidiki bentuk estimator deret Fourier pada transformasi spectral dapat memberikan konstrukstur yang periodik. De-Feis (2002) meneliti estimator deret Fourier dapat memberikan kompromi terbaik antara ketepatan dan biaya komputasi pada model regresi nonparametrik adaptif. Disamping itu pula deret Fourier dapat menampilkan data secara visual yang cukup baik dan *error*-nya kecil, terhadap data dari pengapuran tulang pasien. Faber (2004), Daneela De-Canditiis (2004) mendapatkan kekonvergenan lokal yang optimal pada pemulusan data. Sedangkan Silverberg (2007) mendapatkan karakteristik konvergensi yang meningkat secara signifikan dalam masalah ruang dimensi satu dan dua. Semua penelitian yang sudah dilakukan oleh para penelitian sebelumnya menyangkut deret Fourier yang memiliki trend naik maupun trend turun dalam regresi nonparametrik satu variabel prediktor, dan digunakan untuk menangani pola data yang berulang pada interval tertentu. Bilodeau (1992) menyatakan bahwa estimasi deret Fourier mampu menangani karakter data yang bersifat mulus dan mengikuti pola berulang pada interval tertentu. Deret Fourier merupakan salah satu model yang mempunyai interpretasi statistika dan interpretasi visual yang sangat khusus dan baik (Tripena dan Budiantara, 2007, Eubank, 1998). Penelitian ini pada dasarnya merupakan

pengembangan dari model yang diajukan oleh Belodeau (1992), Daneela dan De-Canditiis (2004), Silverberg (2007), Tripena dan Budiantara (2007). Pengembangannya adalah dari sisi variabel prediktornya, teknik estimasinya dan metode pemilihan parameter penghalus. Selama ini belum pernah ada peneliti lain yang mengembangkan estimator deret Fourier dalam regresi nonparametrik multivariabel yang estimasi kurva regresinya menggabungkan dua tipe estimator yang berbeda, yaitu deret Fourier dan *truncated spline*. Berdasarkan hal ini, maka penulis akan mengembangkan estimator deret Fourier dan *truncated spline* dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif.

Hasil penelitian ini dapat memberikan kontribusi pengembangan teori dalam analisis regresi nonparametrik multivariabel. Secara khusus penelitian ini akan memberi kontribusi original sebagai berikut.

- a) Suatu model dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik menggunakan campuran deret Fourier dan *truncated spline*.
- b) Suatu model produksi padi di Bali menggunakan pendekatan estimator campuran deret Fourier dan *truncated spline*.

Gambaran bentuk orisinalitas penelitian yang akan dilakukan dan roadmap penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti yang terkait dengan regresi nonparametrik multivariabel diberikan dalam Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Roadmap Penelitian

Berdasarkan Gambar 1.1 dapat ditegaskan bahwa penelitian tentang estimator gabungan deret fourier dan *truncated* spline pada regresi nonparametrik multivariabel belum ada yang melakukan baik secara teoritis maupun aplikasi. Dengan demikian penelitian dengan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline merupakan suatu kajian baru yang menarik untuk diteliti.

1.6 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam hal ini diperlukan agar penelitian yang dilakukan lebih fokus sesuai dengan rentang waktu yang direncanakan. Batasan-batasan yang akan dikerjakan adalah sebagai berikut:

1. Antara prediktor bersifat aditif.
2. Penelitian ini dibatasi hanya pada estimasi parameter saja.
3. Estimasi parameter diperoleh dengan menggunakan metode optimasi *Penalized Least Square (PLS)*.
4. Data simulasi yang digunakan berasal dari fungsi deret Fourier dan polinomial spline *truncated*.
5. Kriteria kebaikan model yang digunakan adalah *root mean square error (RMSE)*.

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Regresi Parametrik

Pendekatan regresi parametrik digunakan jika penyebaran pola data membentuk pola tertentu, misalnya linear, kuadratik atau kubik. Dalam regresi parametrik terdapat asumsi bahwa bentuk kurva regresi diketahui (Eubank, 1998). Metode estimasi parameter yang digunakan adalah *Least Square* dan *Maximum Likelihood* (Wahba, 1990). Jika terdapat data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, y_i)$, maka secara umum regresi parametrik linier dapat ditulis dalam persamaan (2.1).

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, n, \\ &= \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji} + \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan y_i adalah respon pada pengamatan ke- i , x_{ji} sebagai prediktor ke- j pada pengamatan ke- i , β_0 adalah intersep, β_j sebagai koefisien regresi ke- j dan nilainya tidak diketahui. ε_i merupakan *error* random pada pengamatan ke- i yang diasumsikan independen berdistribusi normal dengan mean nol dan varians σ^2 , Jika semua asumsi dipenuhi, maka estimasi regresi parametrik efisien, tetapi jika tidak akan menyebabkan interpretasi model yang menyesatkan (Simonoff, 1996).

Secara umum regresi parametrik multivariabel pada persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.2)$$

dengan, \mathbf{y} vektor respon yang berukuran $n \times 1$, \mathbf{X} matriks berukuran $n \times (p+1)$, $\boldsymbol{\beta}$ vektor parameter yang akan diestimasi berukuran $(p+1) \times 1$. Bentuk $\boldsymbol{\varepsilon}$ yaitu vektor *error* random berukuran $n \times 1$ dan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$. Bentuk vektor dan matriks pada persamaan (2.2) adalah.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \text{ dan } \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Parameter β diestimasi dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square (OLS)* yang meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$ dimana

$$\varepsilon'\varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

dengan menurunkan parsial $\varepsilon'\varepsilon$ terhadap β dan menyamakan dengan nol, maka diperoleh estimator

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

2.2 Model Regresi Nonparametrik

Pendekatan regresi nonparametrik yang menyatakan hubungan antara p prediktor dengan respon tunggal yang melibatkan n pengamatan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, y_i)$, dapat dimodelkan dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif seperti pada persamaan berikut:

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \dots + f_p(x_{pi}) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Error ε_i diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol dan varians σ^2 . Kurva regresi f_j diasumsikan tidak diketahui dan termuat di dalam ruang *Sobolev*. Model persamaan regresi (2.3) dapat ditulis dalam vektor sebagai berikut :

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^p \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_j) + \varepsilon$$

dengan $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$; $\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_j) = (f_j(x_{j1}), \dots, f_j(x_{jn}))'$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$.

Kurva regresi nonparametrik $f_j(x_j), j = 1, 2, \dots, p$ diestimasi dengan metode *Penalized Least Square* (Wang, 2011)

$$\underset{f_k \in W_2^m[a_k, b_k]}{\text{Min}} \left\{ n^{-1} \left(y - \sum_{j=1}^p f_j(x_j) \right)' \left(y - \sum_{j=1}^p f_j(x_j) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \int_{a_j}^{b_j} \left(f_j^{(m)}(x_j) \right)^2 dx_j \right\} \quad (2.4)$$

dimana parameter $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, p$ merupakan parameter penghalus.

Bentuk kurva regresi nonparametrik atau f_j dalam persamaan (2.3) tidak diketahui bentuknya. Kurva regresi f_j hanya diasumsikan *smooth* (mulus) yang termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, dimana pemilihan ruang fungsi berdasarkan sifat kemulusan pada kurva regresi f_j (Wahba, 1990). Terdapat 5(lima) metode pendekatan penaksir parameter dalam regresi nonparametrik yang digunakan untuk mengestimasi kurva regresi f_j yaitu: Kernel (Härdle, 1990; 1991), spline (Wahba, 1990; Budiantara, 2000), wavelet (Antoniadis, *et. al.*, 1994), deret Fourier (Eubank, 1998) dan polinomial lokal (Welsh dan Yee, 2006).

2.3 Metode Penaksir Parameter dalam Regresi Nonparametrik

Metode penaksir parameter dalam regresi nonparametrik, terdapat beberapa model pendekatan untuk mendapatkan estimasi kurva regresi f_j , seperti pendekatan Kernel (Härdle, 1990; 1991), Spline (Wahba, 1990; Budiantara, 2000), Wavelet (Antoniadis, *et. al.*, 1994), Deret Fourier (Eubank, 1998) dan Polinomial Lokal (Welsh dan Yee, 2006). Jika diperhatikan secara detail prosedur estimasi dalam regresi nonparametrik, terlihat dengan jelas bahwa pendekatan tersebut diperoleh dengan menghampiri kurva regresi f_j dengan fungsi tertentu dan selanjutnya dilakukan optimasi untuk memperoleh estimasinya. Model pendekatan metode penaksir parameter dalam regresi nonparametrik yang sudah ditemukan oleh beberapa peneliti dijelaskan sebagai berikut.

2.3.1 Kernel

Kernel merupakan estimator yang pada awalnya banyak digunakan dalam regresi nonparametrik. Nadaraya (1964) dan Watson (1964) merupakan kelompok peneliti pertama yang membahas tentang regresi kernel. Setelah itu banyak penelitian berkaitan dengan pengembangan regresi kernel, antara lain Okumura dan Naito (2006) yang mengkaji tentang konstruksi estimator fungsi regresi dengan meminimumkan suatu fungsi lokal, dan Yao (2007) yang telah menurunkan distribusi asimtotik dari estimator kernel dengan menggunakan rata-rata terbobot untuk data longitudinal. Selain itu, Kayri dan Zirhlioglu (2009) meneliti tentang estimator kernel untuk melihat hubungan antara tingkat ketergantungan internet (sebagai variabel respon) dengan lamanya penggunaan internet setiap hari (sebagai variabel prediktor) di sekolah menengah.

2.3.2 Spline

Spline adalah salah satu bentuk estimator yang cukup populer, seringkali digunakan dalam regresi nonparametrik karena mempunyai interpretasi visual yang baik, fleksibel, serta mampu menangani karakter fungsi yang bersifat mulus (Eubank, 1999; Budiantara, 2007). Perkembangan selanjutnya yang mengkaji tentang fungsi spline dalam regresi nonparametrik multivariabel diantaranya Craven dan Wahba (1979) melakukan kajian tentang metode *Cross Validation* (CV) untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator spline. Selain itu, Wahba (1990) mengkaji tentang metode untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator spline, yaitu metode *Generalized Cross Validation* (GCV). Budiantara (2000) dalam perkembangannya telah melakukan kajian metode GCV dari Wahba (1990) untuk estimator spline terbobot dan memperlihatkan sifat optimal asimtotik metode ini masih berlaku untuk estimator spline terbobot.

2.3.3 Wavelet

Wavelet juga banyak digunakan sebagai estimator model regresi nonparametrik. Kajian tentang wavelet pada regresi nonparametrik antara lain dapat dilihat pada Antoniadis *et al.* (2001) yang membahas tentang metode wavelet untuk memodelkan observasi dari suatu signal yang terkontaminasi oleh gangguan (*noise*) yang berdistribusi Gauss dan bersifat aditif. Antoniadis *et al.* (2001) juga memberikan review lengkap tentang estimator wavelet yang dikembangkan untuk data yang terkontaminasi gangguan tersebut. Selain itu, Rakotomamonjy *et al.* (2005) telah memperkenalkan suatu metode untuk mengkonstruksi suatu kernel wavelet pada ruang Hilbert untuk regresi nonparametrik ketika titik-titik sampling tidak sama lebar. Hasil kajian Rakotomamonjy *et al.* (2005) pada data simulasi dan data riil menunjukkan efektivitas dari penggunaan kernel wavelet.

2.3.4 Deret Fourier

Deret Fourier merupakan salah satu estimator alternatif yang akhir-akhir ini banyak dikaji dan dikembangkan oleh peneliti regresi nonparametrik. De Jong (1977) merupakan kelompok peneliti awal yang mengkaji tentang transformasi deret Fourier untuk penghalusan fungsi densitas, khususnya pada penghalusan estimator spektral. Pada tahun 1992, Bilodeau mengkaji tentang estimator deret Fourier pada regresi nonparametrik dengan komponen prediktor yang aditif dan *penalized least squares* untuk mendapatkan koefisien-koefisiennya. Estimator deret Fourier yang digunakan adalah jumlahan dari suatu fungsi linier dan suatu fungsi polinomial trigonometri. Amato dan De-Canditiis (2001) telah mengkaji metode regularisasi wavelet dan deret Fourier pada permasalahan regresi nonparametrik. Selanjutnya, Amato, Antoniadis, dan De-Feis (2002) juga menunjukkan bahwa estimator deret Fourier dalam model regresi nonparametrik aditif memberikan optimasi terbaik antara ketepatan dan biaya komputasi. Selain itu, Oirrak (2001) menyatakan bahwa deret Fourier memberikan estimasi secara menyeluruh dalam ruang dimensi dua dan bergerak secara perlahan.

Peneliti lain yang mengkaji regresi nonparametrik dengan menggunakan deret Fourier adalah Faber (2004) mengkaji deret Fourier menggunakan metode *PLS* untuk mengestimasi permasalahan data scanning radiografi dari pengapuran tulang pasien. Silverberg (2007) menunjukkan bahwa karakteristik konvergensi estimator deret Fourier meningkat secara signifikan dalam masalah ruang dimensi satu dan dua.

2.3.5 Polinomial Lokal

Beberapa penelitian tentang polinomial lokal diberikan oleh Welsh dan Yee (2006) yang mengkaji tentang penggunaan polinomial lokal pada regresi nonparametrik dengan variabel respon lebih dari satu. Pada kajiannya, Welsh dan Yee (2006) telah menurunkan sifat bias dan varians asimtotik dari estimator polinomial lokal. Selain itu, He dan Huang (2009) juga mengkaji tentang estimator linier lokal penghalusan ganda (*double-smoothing*) yang dikonstruksi melalui kombinasi secara integral semua nilai taksiran pada x dari garis lokal. Hasil kajian He dan Huang (2009) pada studi simulasi dan data real menunjukkan bahwa regresi linier lokal penghalusan ganda seringkali memberikan hasil yang lebih baik dibanding dengan regresi lokal linier.

2.4 Pemilihan Parameter Penghalus

Parameter penghalus λ merupakan bagian penting dalam regresi nonparametrik. Jika λ besar maka penduga dari fungsi yang diperoleh akan semakin mulus, tetapi kemampuan untuk memetakan data kurang baik. Sebaliknya jika λ kecil maka penduga dari fungsi yang diperoleh akan semakin kasar. Oleh karena itu, diperlukan suatu nilai λ yang tidak terlalu besar maupun terlalu kecil sehingga diperoleh penduga fungsi yang terbaik. Nilai λ yang demikian itu merupakan nilai λ yang optimal. Dengan demikian pemilihan nilai λ yang optimal merupakan suatu yang sangat penting didalam analisis spline.

Metode yang sering digunakan dalam memilih parameter penghalus λ adalah *CV* dan *GCV*. Ide dasar dari *GCV* adalah memodifikasi *CV* (Green dan Silverman,

1994). Beberapa penulis seperti Craven dan Wahba (1979), Wahba (1985), Li (1986), Kohn (1991), Shao (1993), Venter dan Snyman (1995) mengembangkan metode CV dan GCV untuk memilih λ . Nilai GCV didefinisikan sebagai berikut :

$$GCV(\lambda) = \frac{MSE(\lambda)}{n^{-1} \text{trace}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\lambda)]^2} \quad (2.5)$$

dengan $MSE(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}_{\lambda i})^2$

dan $\mathbf{H}(\lambda)$ suatu matriks yang diperoleh dari persamaan $\hat{f}_{\lambda} = \mathbf{H}(\lambda)y$. Nilai λ optimal berkaitan dengan $GCV(\lambda)$ yang terkecil. Matriks $\mathbf{H}(\lambda)$ merupakan matriks hat yang bergantung pada titik-titik knot t pada spline *truncated* dan osilasi K pada deret Fourier. Letak dan banyaknya titik knot t dan osilasi K , harus dipilih secara optimal untuk mendapatkan estimator yang sesuai dengan data.

2.5 Regresi Nonparametrik Deret Fourier

Diberikan n pengamatan yang independen yaitu pasangan data (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Pola hubungan antara variabel x_i dan y_i dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i,$$

dengan $f(x_i)$ merupakan fungsi regresi yang tidak diketahui bentuknya. Fungsi regresi $f(x_i)$ diasumsikan *smooth* dalam arti termuat dalam ruang fungsi tertentu (Eubank, 1998).

Pendekatan regresi nonparametrik deret fourier diperoleh dengan meminimumkan kurva regresi menggunakan metode *Penalized Least Squares (PLS)*. Metode ini merupakan kriteria pendugaan yang menggabungkan antara *goodness of fit* dengan kemulusan kurva, yang keduanya dikontrol oleh suatu parameter penghalus. Misalkan kurva regresi diasumsikan termuat di dalam ruang $C(0, \pi)$:

$$C(0, \pi) = \{ f, f \text{ kontinu pada } (0, \pi) \}.$$

Estimator \hat{f} diperoleh dengan meminimumkan persamaan 2.6 menggunakan *PLS*:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (f''(x_i))^2 dx_i \quad (2.6)$$

dengan $\lambda > 0$ adalah parameter penghalus (Bilodeau, 1992).

Deret Fourier dengan kasus pembobotan maka ukuran kesesuaian kurva terhadap data adalah :

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(x_i)) \quad (2.7)$$

dengan w_i suatu pembobot, sedangkan ukuran kekasaran kurva adalah :

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (f''(x_i))^2 dx_i.$$

Estimator \hat{f} diperoleh dengan meminimumkan persamaan 2.7 menggunakan *PLS* terbobot:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (f''(x_i))^2 dx_i. \quad (2.8)$$

Menurut Bilodeau (1992), estimator deret Fourier diperoleh dari (2.8) dapat ditulis menjadi :

$$\hat{f}(x_i) = \hat{b}(x_i) + \frac{1}{2} \hat{a}_0 + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k \cos kx_i. \quad (2.9)$$

Eubank (1998) dan Bilodeau (1992), mengatakan bahwa deret Fourier yang digunakan dalam pendekatan regresi nonparametrik bisa dengan trend maupun non trend. Tripena dan Budiantara (2007) dan Bilodeau (1992) dalam penelitian estimasi kurva regresi nonparametrik menggunakan deret Fourier dengan trend. Penelitian Silverbeg (2007) mengatakan bahwa estimator deret Fourier non trend dalam regresi nonparametrik multivariabel mendapatkan hasil yang mulus (*smooth*). Menurut Daniela dan De Canditiis (2004) mengatakan bahwa mengestimasi kurva regresi nonparametrik multivariabel dengan deret Fourier non trend menggunakan metode

Weighted Penalized Least Square (WPLS). Penelitian ini difokuskan pada penggunaan deret Fourier dengan trend dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif.

2.5.1 Estimator Deret Fourier dengan Trend dalam Regresi Nonparametrik

Univariabel

Estimator deret fourier dengan trend univariabel, dalam beberapa tahun terakhir banyak mendapat perhatian dari beberapa peneliti regresi nonparametrik. Estimator deret Fourier dengan trend univariabel dalam regresi nonparametrik umumnya digunakan apabila data yang diselidiki polanya tidak diketahui dan ada kecenderungan pola berulang (Tripena dan Budiantara, 2007 dan Bilodeau, 1992).

Diberikan model regresi nonparametrik univariabel $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$. Bentuk kurva regresi $f(x_i)$ diasumsikan tidak diketahui dan termuat di dalam ruang fungsi kontinu $C(0, \pi)$. *Error* random ε_i diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol dan varians σ^2 . Karena $f(x_i)$ kontinu pada interval $(0, \pi)$ maka dapat dihamperi oleh fungsi deret Fourier dengan trend $f(x)$, dengan:

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \cos kx$$

dimana $b, \alpha_0, \alpha_k, k = 1, 2, \dots, K$ merupakan parameter-parameter model. Berdasarkan model deret Fourier ini, Bilodeau (1992) memberikan estimator deret Fourier dengan trend univariabel seperti tertuang dalam teorema di bawah ini.

Teorema 1 (Bilodeau, 1992).

Apabila fungsi regresi nonparametrik univariabel $f(x_i)$ dihamperi oleh fungsi deret fourier dengan trend $F(x)$ maka estimator deret Fourier dengan trend diperoleh dari meminimumkan :

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - bx_i - \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_{k=1}^K \cos kx_i \right) + \lambda \sum_{i=1}^K i^4 \alpha_i^2, \lambda > 0$$

dengan $b \in R, \alpha_0 \in R, \alpha_k \in R, k = 1, 2, \dots, K$. Estimator $F(x)$ diberikan oleh :

$$\hat{F}_\lambda(x) = \hat{b}_{(\lambda)} x + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k(\lambda) \cos kx$$

dengan $\hat{\alpha}(\lambda) = (\hat{b}(\lambda), \hat{\alpha}_0(\lambda), \hat{\alpha}_1(\lambda), \dots, \hat{\alpha}_K(\lambda))$ diperoleh dari persamaan :

$$\hat{\alpha}(\lambda) = (n^{-1} X' X + \lambda D)^{-1} n^{-1} X' y,$$

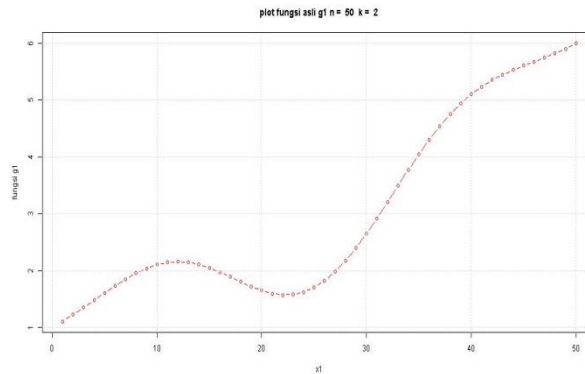
dimana D matriks diagonal, diberikan oleh $D = \text{diag}(0, 0, 1^4, 2^4, \dots, K^4)$ dan X suatu matriks koefisien.

Ilustrasi berikut ini memberikan contoh model persamaan regresi $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$,

Dimana fungsi regresi f mengikuti bentuk fungsi deret Fourier dengan trend sebagai berikut:

$$f(x_i) = 0,1x_i + 1 + 0,9 \cos 2\left(\frac{2\pi x_i}{50}\right),$$

Untuk $x_i \sim U(0,1)$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, dan $i = 1, 2, \dots, 50$, sehingga diperoleh pola hubungan antara respon dan prediktor seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Fungsi Deret Fourier

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat diilustrasikan bahwa pola hubungan antara variabel respon dan prediktor menunjukkan pola berulang pada sub interval dengan trend tertentu.

2.5.2 Estimator Deret Fourier dengan Trend dalam Regresi Nonparametrik

Multivariabel

Deret Fourier merupakan polinomial trigonometri yang mempunyai fleksibilitas yang tinggi. Deret Fourier baik digunakan untuk mengistimasi kurva regresi yang menunjukkan gelombang sinus atau cosinus (Budiantara, 2007). Diberikan model regresi nonparametrik multivariabel:

$$\begin{aligned} y_i &= \mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) + \varepsilon_i \\ &= \sum_{j=1}^p f_j(x_{ji}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Selanjutnya kurva regresi f_j dihipotesis dengan fungsi deret Fourier:

$$f_j(x_{ji}) = b_j x_{ji} + \frac{1}{2} \alpha_{0j} + \sum_{k=1}^K \alpha_{kj} \cos kx_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Estimator kurva regresi deret Fourier diperoleh dari optimasi:

$$\underset{\beta \in R^{q(k+2)}}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \left(b_j x_{ji} + \frac{1}{2} \alpha_{0j} + \sum_{k=1}^K \alpha_{kj} \cos kx_{ji} \right) \right)^2 \right\} = \underset{\beta \in R^{q(k+2)}}{\text{Min}} \{ Q(\beta) \}$$

Untuk menyelesaikan optimasi diatas dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \sum_{i=1}^n \left(y_i - \mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \left(b_j x_{ji} + \frac{1}{2} \alpha_{0j} + \alpha_{1j} \cos x_{ji} + \dots + \alpha_{Kj} \cos Kx_{ji} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi:

$$Q(\beta) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}(K)\beta)' (\mathbf{y} - \mathbf{X}(K)\beta) \quad (2.11)$$

Estimasi kurva regresi $\hat{\mu}$ diperoleh dengan cara ekuivalen dengan estimasi $\hat{\beta}$.

Estimasi $\hat{\beta}$ diperoleh dari meminimumkan $Q(\beta)$ dengan menurunkan secara parsial $Q(\beta)$ terhadap β , serta sedikit penjabaran dan menganggap matriks $\mathbf{X}(K)$

nonsingular (matriks dengan rank penuh) maka diperoleh estimator β sebagai berikut:

$$\hat{\beta}(K) = (\mathbf{X}'(K)\mathbf{X}(K))^{-1} \mathbf{X}'(K)\mathbf{y}.$$

Estimator untuk kurva regresi f_j diberikan oleh:

$$\hat{f}_j(x_{ji}) = \hat{b}_j x_{ji} + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_{0j} + \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_{kj} \cos kx_{ji}.$$

Akibatnya estimasi untuk kurva regresi $\mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) &= \sum_{j=1}^p \hat{f}_j(x_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^p \left(\hat{b}_j x_{ji} + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_{0j} + \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_{kj} \cos kx_{ji} \right). \end{aligned}$$

Kurva regresi deret Fourier sangat tergantung kepada parameter osilasi K . Estimator deret Fourier terbaik diperoleh dari nilai K yang optimal. Nilai K optimal diperoleh dengan menggunakan metode *GCV* (*Generalized Cross Validation*). Nilai K optimal bersesuaian dengan *GCV* terkecil yaitu:

$$GCV(K_{optimal}) = \min_{K \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \frac{n^{-1} \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{A}(K)) \mathbf{y} \right\|^2}{\left(n^{-1} \text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{A}(K)) \right)^2} \right\}$$

dengan $\mathbf{A}(K) = \mathbf{X}(K)(\mathbf{X}'(K)\mathbf{X}(K))^{-1} \mathbf{X}'(K)$.

2.6 Regresi Nonparametrik Spline

Potongan polinomial memainkan peranan penting dalam teori aproksimasi dan statistika. Potongan polinomial mempunyai sifat fleksibel dan efektif untuk menangani sifat lokal suatu fungsi atau data (Eubank, 1999). Salah satu jenis potongan polinomial yang penting adalah polinomial spline. Spline sebagai pendekatan pola data dikenakan oleh Whittaker pada tahun 1923, sedangkan spline

yang didasarkan pada suatu persoalan optimasi dikembangkan oleh Reinsch pada tahun 1967 (Wahba, 1990).

Polinomial spline dengan ordo p dengan titik-titik knot t_1, t_2, \dots, t_p , adalah fungsi $f(x_i)$ yang disajikan dalam persamaan 2.14.

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j + \sum_{j=0}^p \beta_{p+j} (x_i - t_j)_+^p, \quad (2.12)$$

dengan $(x_i - t_j)_+^p$ merupakan fungsi *truncated* (potongan) yang diberikan oleh:

$$(x_i - t_j)_+^p = \begin{cases} (x_i - t_j)^p, & x_i \geq t_j \\ 0, & x_i < t_j \end{cases} \quad (2.13)$$

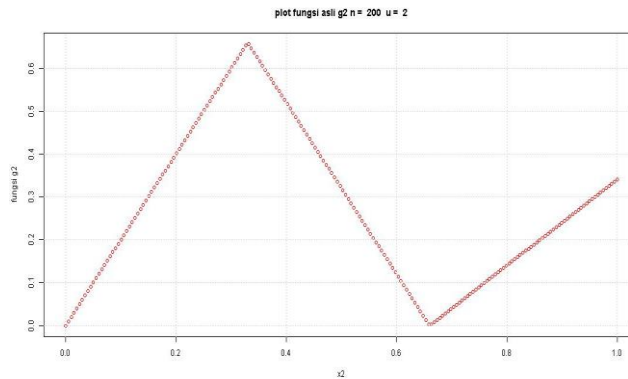
Berikut ini diberikan ilustrasi fungsi polinomial splin dalam persamaan regresi.

Misalkan diberikan persamaan regresi $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, dimana fungsi regresi $f(x_i)$.

Mengikuti bentuk fungsi polinomial spline *truncated* sebagai berikut:

$$f(x_i) = 2x_i - 4(x_i - 0,33)_+ + 3(x_i - 0,66)_+,$$

untuk $x_i \sim U(0,1)$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ dan $i = 1, 2, \dots, 100$, sehingga diperoleh pola hubungan antara respon dan prediktor seperti pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Fungsi Spline *Truncated*

Bertitik tolak dari Gambar 2.2 terlihat bahwa pola hubungan variabel respon dan prediktor mengindikasikan ada perubahan pola perilaku data pada sub-sub interval tertentu.

Penelitian estimator spline pada model regresi nonparametrik, telah banyak dilakukan seperti Huang (2003), Crainiceanu, Ruppert dan Wand (2004), Kim dan Gu (2004), Lee (2004), Budiantara (2006), serta Howell (2007). Model regresi nonparametrik yang menyatakan hubungan antara p variabel prediktor dengan variabel respon tunggal dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \sum_{j=1}^p f_j(x_{ji}) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

Keterangan :

x_{ji} : variabel prediktor ke j , $j=1, 2, \dots, p$ dan $i=1, 2, \dots, n$

y_i : variabel respon ke i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$

f : kurva regresi

p : banyaknya variabel prediktor

ε_i : variabel error (random) pada subyek ke $i = 1, 2, \dots, n$

Kurva regresi f tidak diketahui bentuknya. Kurva regresi f_j diasumsikan mulus (*smooth*) dalam arti termuat dalam ruang fungsi tertentu, khususnya ruang *Sobolev* $f_j \in W_2^m[a, b]; j = 1, 2, \dots, p$ dengan :

$$W_2^m[a, b] = \left\{ f_j : \int_a^b [f_j^{(m)}(x_j)]^2 dx_j < \infty \right\}. \quad (2.15)$$

Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi f_j menggunakan optimasi :

$$\text{Min}_{f_j \in W_2^m[a, b]} \left[n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 \right],$$

dengan syarat

$$g_j(f_j) = \int_a^b (f_j^{(m)}(x_j))^2 dx_j \leq \lambda_j, \lambda_j > 0 ; j = 1, 2, \dots, p$$

Estimasi ini ekuivalen dengan *Penalized Least Square (PLS)* yaitu penyelesaian optimasi sebagai berikut (Eubank, 1999) :

$$\underset{f_j \in W_2^m[a,b]}{\text{Min}} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 + \sum_{j=1}^p \lambda_j \int_a^b (f_j^{(m)}(x_j))^2 dx_j \right\} \quad (2.16)$$

Bagian pertama pada persamaan di atas merupakan fungsi yang mengukur kecocokan data (*goodness of fit*). Bagian kedua merupakan ukuran kekasaran kurva (*roughness penalty*) dan λ_j parameter penghalus yang mengontrol *goodness of fit* dan *roughness penalty*.

Pendekatan regresi nonparametrik spline ditentukan berdasarkan pada data yang ada yaitu data *cross-section* dan *longitudinal* (Eubank, 1999), Beberapa peneliti telah mengembangkan estimator spline pada model regresi nonparametrik untuk data *cross-section*, seperti Budiantara (2006), Huang (2003), Lee (2004) serta Howell (2007). Sedangkan peneliti lain yang mengembangkan estimator spline pada model regresi nonparametrik untuk data longitudinal seperti Verotta (1993), Lin, Wang, Welsh dan Carrol (2006), serta Budiantara (2009). Model regresi nonparametrik untuk data *longitudinal* memiliki perbedaan dengan data *cross-section*, yang terletak pada pengamatan antar subyek diasumsikan independen satu sama lainnya, tetapi antara pengamatan dalam subyek yang sama adalah dependen (Wu dan Zhang, 2006). Sedangkan pada penelitian ini akan dikembangkan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif untuk data *cross-section*.

2.6.1 Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Univariabel

Spline adalah salah satu bentuk estimator yang juga sering kali digunakan dalam regresi nonparametrik, karena mempunyai interpretasi visual yang baik, fleksibel, serta mampu menangani karakter fungsi yang bersifat mulus (Wahba,

1990). Diberikan data berpasangan (x_i, y_i) , maka model regresi nonparametrik univariabel secara umum dapat disajikan sebagai berikut:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

dengan $f(x_i)$ merupakan kurva regresi yang dihampiri fungsi spline berorde p dengan titik knot t_1, t_2, \dots, t_p yang diberikan oleh persamaan 2.18.

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j + \sum_{j=0}^p \beta_{p+j} (x_i - t_j)_+^p, \quad (2.18)$$

dengan $(x_i - t_j)_+^p$ merupakan fungsi *truncated* yang diberikan oleh:

$$(x_i - t_j)_+^p = \begin{cases} (x_i - t_j)^p, & x_i \geq t_j \\ 0, & x_i < t_j \end{cases}$$

Persamaan (2.17) disubstitusikan kedalam persamaan (2.18), maka akan diperoleh persamaan regresi nonparametrik univariabel sebagai berikut:

$$y_i = \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j + \sum_{j=0}^p \beta_{p+j} (x_i - t_j)_+^p + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.19)$$

Apabila $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ maka y_i juga berdistribusi normal dengan mean $f(x_i)$ dan variansi σ^2 , sehingga diperoleh fungsi likelihood seperti persamaan 2.20.

$$\begin{aligned} L(y, f) &= \prod_{i=1}^n \left((2\pi\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}} \text{Exp} \left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i - f(x_i))^2 \right) \right) \\ &= \left[\prod_{i=1}^n (2\pi\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \text{Exp} \left(-\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i - f(x_i))^2 \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Menurut Budiantara (2006), maka berdasarkan fungsi likelihood pada persamaan (2.20), estimasi kurva regresi $f(x_i)$ diperoleh dari menyelesaikan optimasi:

$$Max_f \{L(y, f)\} = Max_{\gamma \in \mathfrak{R}^{p+r+1}} \left[\prod_{i=1}^n (2\pi\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}} \right] Exp - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma_i^2} \left(y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j + \sum_{j=0}^p \beta_{p+j} (x_i - t_j)_+^p \right)^2.$$

2.6.2 Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Multivariabel

Diberikan data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, y_i)$. Asumsikan data ini mengikuti model regresi nonparametrik spline multivariabel dapat disajikan sebagai berikut:

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) + \varepsilon_i = \sum_{j=1}^p f_j(x_{ji}) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Dengan y_i adalah variabel respon, f_j kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan dihampiri dengan menggunakan fungsi spline *truncated* derajat p dengan titik-titik knot $t_{11}, t_{21}, \dots, t_{rk}$:

$$f_j(x_{ji}) = \sum_{u=0}^p \beta_{uj} x_{ji}^u + \sum_{t=1}^r \beta_{(p+t)j} (x_{ji} - t_{kj})_+^p$$

Fungsi $(x_{ji} - t_{kj})_+^p$ merupakan fungsi *truncated* untuk nonparametrik multivariabel:

$$(x_{ji} - t_{kj})_+^p = \begin{cases} (x_{ji} - t_{kj})_+^p, & x_{ji} \geq t_{kj} \\ 0 & , x_{ji} < t_{kj} \end{cases}$$

Untuk setiap kurva dalam ruang spline dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f_j(x_{ji}) = \sum_{u=0}^p \beta_{uj} x_{ji}^u + \sum_{t=1}^r \beta_{(p+t)j} (x_{ji} - t_{kj})_+^p, j = 1, 2, \dots, p$$

Dengan β_{uj} adalah parameter dari fungsi spline, model regresi spline dapat ditulis menjadi:

$$y_i = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{u=0}^p \beta_{uj} x_{ji}^u + \sum_{t=1}^r \beta_{(p+t)j} (x_{ji} - t_{kj})_+^p \right) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

Apabila $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ maka y_i juga berdistribusi normal dengan mean $f(x_i)$ dan variansi σ^2 , sehingga diperoleh fungsi likelihood seperti persamaan:

$$L(y, f) = \prod_{i=1}^n \left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - f_j(x_{ji}))^2\right) \right). \quad (2.23)$$

Menurut Wahba (1990), maka berdasarkan fungsi likelihood pada persamaan (2.23), estimasi kurva regresi $f(x_i)$ diperoleh dari menyelesaikan optimasi:

$$Max_f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (y_i - f_j(x_{ji}))^2 \right\}. \quad (2.24)$$

2.7 Model *Additive* dalam Regresi Nonparametrik

Menurut Hastie dan Tishirani (1990), Model *Additive* diberikan dalam persamaan 2.25.

$$E(Y|X) = \sum_{j=1}^m \mu_j(x_j). \quad (2.25)$$

Model μ_j dapat diestimasi dengan metode *Least Square*, dimana μ_j adalah vektor $(n \times 1)$ dengan observasi pengamatan $[\mu_j(x_{1j}), \dots, \mu_j(x_{nj})]'$. Model regresi dengan p prediktor untuk spline *truncated* dan g untuk prediktor deret Fourier.

Hubungan variabel prediktor dengan pengamatan data $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{qi})$ dan respon y_i diasumsikan fungsinya tidak diketahui bentuknya. Persamaan regresi nonparametrik multivariabel diberikan sebagai berikut:

$$y_i = \mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{qi}) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Kurva $\mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{qi})$ tidak diketahui bentuknya, kontinu dan *differensiabel*, error ε_i diasumsikan berdistribusi normal, dengan mean nol dan variansi σ^2 . Model *Additive* $\mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{qi})$ disajikan:

$$\mu(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{qi}) = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \dots + f_p(x_{pi}) + g_1(z_{1i}) + g_2(z_{2i}) + \dots + g_q(z_{qi}) + \varepsilon_i.$$

Dapat ditulis:

$$\mu(x, t) = \sum_{s=1}^p f_s(x_{si}) + \sum_{k=1}^q g_k(z_{ki}) + \varepsilon_i. \quad (2.26)$$

Dimana $f_s(x_{si})$ dan $g_k(z_{ki})$ adalah fungsi deret Fourier dan spline *truncated*.

Pengembangan model gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, pada prediktor yang berbeda dan mempunyai pola berubah pada setiap prediktor selama ini belum pernah dilakukan oleh peneliti lain. Bilodeau (1992), Daneela dan Candities (2004), Silverberg (2007), dan Tripena dan Budiantara (2007) mengembangkan model regresi nonparametrik multivariabel dengan menggunakan metode penaksiran deret Fourier untuk seluruh variabel prediktornya. Salah satu pertanyaan terbuka yang muncul dari penelitian Bilodeau (1992) adalah adanya peluang untuk dikembangkan pemodelan regresi nonparametrik multivariabel sebagian menggunakan metoda penaksir spline dan sebagian menggunakan deret Fourier. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikembangkan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif.

2.8 Ukuran Kesesuaian Model

Model yang sesuai adalah model yang memiliki ukuran yang baik pada tahap evaluasi. Penelitian ini menggunakan dua ukuran yaitu *Root of Mean Square Error* (*RMSE*) serta R^2 atau koefisien determinasi. *RMSE* adalah ukuran yang digunakan untuk mengevaluasi model dengan cara menghitung selisih antara nilai y_i dengan nilai estimasi \hat{y}_i pada setiap respon, sehingga diperoleh (Greene, 2007):

$$RMSE_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

Nilai R^2 atau koefisien determinasi mengukur seberapa besar rasio antara keragaman data yang mampu dijelaskan oleh model dibandingkan dengan total keragaman data atau dengan persamaan sebagai berikut:

$$R_y^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

Model yang paling baik/sesuai adalah model yang memiliki nilai $RMSE_y$ terkecil dan R_y^2 terbesar.

Hal yang perlu diperhatikan dalam pemodelan data adalah bagaimana membentuk model yang sesuai/tepat menggambarkan fenomena riil yang kompleks bukan mendapatkan model yang sempurna. Salah satu untuk mengetahuinya adalah dengan melakukan validasi model untuk melihat ketepatan model dalam prediksi.

2.9 Uji Deteksi *Non-linear* dengan Uji Ramsey's RESET, Uji White dan Uji Terasvirta

Uji Ramsey's RESET, Uji White dan Uji Terasvirta untuk mendeteksi apakah suatu model mengikuti pola linear atau *non-linear* tersedia dalam software R. Statistik uji Ramsey's RESET adalah:

$$F = \frac{(R_{new}^2 - R_{old}^2) / p}{(1 - R_{new}^2) / (n - k)}$$

dengan p jumlah variabel independen baru, k jumlah parameter pada model baru, n jumlah data. Kesimpulanya H_0 ditolak bila $F > F(\alpha, p, n-k)$

Uji White adalah uji deteksi *non-linearitas* yang dikembangkan dari model neural network yang ditemukan oleh White (1989). Uji white menggunakan statistik χ^2 dan F . Prosedur yang digunakan untuk χ^2 adalah :

- Meregresikan y_t pada $1, x_1, x_2, \dots, x_p$ dan menghitung nilai-nilai residual u_t .

- b. Meregresikan \hat{u}_t pada $1, x_1, x_2, \dots, x_p$ dan m prediktor tambahan dan kemudian hitung koefisien determinasi dari regresi R^2 . Dalam uji ini, m prediktor tambahan ini adalah nilai-nilai dari hasil dari $\psi(\gamma_j' w_t)$ hasil dari suatu transformasi komponen utama.
- c. Hitung $\chi^2 = nR^2$, dimana n adalah jumlah pengamatan yang digunakan.

Dengan hipotesis linearitas, χ^2 mendekati distribusi $\chi^2_{(m)}$ atau tolak H_0 jika $P\text{-value} < \alpha$.

Uji Terasvirta adalah uji deteksi *non-linearitas* yang juga dikembangkan dari model *neural network* dan termasuk dalam kelompok uji tipe *Lagrange Multiplier* (LM) yang dikembangkan dengan ekspansi Taylor (Terasvirta, 1993). Pengambilan kesimpulan ketiga uji tersebut dapat dilihat melalui nilai *P-value*, yaitu tolak H_0 jika kurang dari α .

2.10 Pemodelan Produksi Padi di Provinsi Bali

Pemodelan produksi padi dalam penelitian ini mempergunakan model regresi nonparametrik multivariabel aditif, dengan pendekatan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*. Selain luas lahan, faktor-faktor yang diperkirakan berpengaruh terhadap tumbuh dan berkembangnya tanaman padi adalah iklim, yang meliputi curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin (Prabandari, *et al*, 2015).

2.10.1 Produksi Padi di Provinsi Bali

Hasil Sensus Pertanian Desember 2013, jumlah rumah tangga petani (RTP) di Bali 404.507 KK menurun 55.930 KK (17,85 persen) dibandingkan tahun 2003 yang jumlahnya mencapai 460.437 KK. Penurunan ini karena alih fungsi lahan menjadi pemukiman, (BPS, 2013). Dari jumlah itu, 63,58 persen (257.181 rumah tangga) adalah petani gurem yang menggarap lahan kurang dari 50 are. Sub-sektor pertanian tanaman pangan mengalami penurunan paling besar selama sepuluh tahun

terakhir yakni 78,42 persen. Sektor perkebunan penurunannya 12,34 persen. Petani utama di Bali sebesar 27,40 persen berada pada kelompok umur 45-54 tahun. Minimnya golongan muda yang terlibat merupakan ancaman ketahanan pangan Bali.

Menurunnya rumah tangga petani, akibat sektor pertanian dianggap tidak menguntungkan. Pembangunan sektor pertanian di Bali cenderung stagnan karena kontribusinya terhadap produk domestik regional bruto (PDRB) sangat rendah. Alih fungsi lahan sawah di Bali setiap tahun rata-rata 1.000 hektar. Sumbangan sektor pertanian terhadap perekonomian Bali selama ini hanya 18,5 persen paling kecil dibandingkan sektor lainnya. Ancaman lainnya adalah melangitnya tarif Pajak Bumi dan Bangunan (PBB). Hal ini mendorong petani menjual sawahnya, menunjukkan selama lima 5 tahun (2004-2009), rata-rata setiap tahun sawah yang beralih fungsi lebih dari 1.000 ha. Hal ini sangat membahayakan ketahanan pangan Bali (BPS, 2010).

Ketahanan pangan sangat terkait dengan makanan pokok kita yakni beras di atas 800.000 ton cukup untuk pemenuhan penduduk lokal. Data Dinas Pertanian Bali luas tanam pada tiga tahun terakhir menunjukkan tahun 2011 seluas 152.545 hektar, tahun 2012 seluas 153.938 hektar dan tahun 2013 seluas 151.162 hektar. Sementara luas panen padi dalam tiga tahun terakhir yakni 151.585 hektar, 149.000 hektar dan 148.847 hektar. Produksi padi dalam tiga tahun terakhir yakni 858.316 ton, 865.554 ton, 859.289 ton. Upaya lain untuk menjaga ketahanan pangan sangat terkait diversifikasi pangan. Misalnya, pengganti konsumsi beras dengan ketela, buah, sayur, ikan dan lainnya. Soal perbaikan infrastruktur pertanian juga terus diupayakan. Pada tahun 2013 perbaikan irigasi mencakup areal seluas 8.321 hektar setara 10,2 persen dari luas sawah Provinsi Bali. Pihaknya berupaya menggenjot produksi padi dengan menyediakan berbagai macam benih pilihan. Pupuk dan traktor sehingga saat panen raya harganya tidak jatuh (BPS, 2013).

2.10.2 Iklim dan Tanaman Padi

Tentunya ada interaksi antara unsur-unsur iklim terhadap tanaman padi. Pengaruh unsur-unsur iklim lingkungan terhadap tanaman padi adalah menjadi penting dengan semakin besarnya tanaman dan semakin banyaknya jumlah rumpun tanaman. Pada awalnya tanaman padi hanya dipengaruhi oleh iklim mikro saja, namun kemudian dipengaruhi oleh meso dan iklim macro. Ada hubungan erat antara pola iklim dengan distribusi tanaman padi sehingga beberapa klasifikasi iklim didasarkan pada dunia tumbuh tumbuhan. Pertumbuhan dan perkembangan tanaman padi sangat dipengaruhi oleh kondisi lingkungan terutama cuaca. Unsur cuaca yang sangat berpengaruh terhadap pertumbuhan tanaman padi adalah intensitas radiasi matahari, kelembaban relatif dan suhu udara. Suhu berpengaruh pada laju proses-proses metabolisme. Pengaruh suhu juga terlihat pada perkembangan, pembentukan daun, misiasi organ produktif, pematangan buah dan umur tanaman (Bey, 1991). Peningkatan suhu akan mempercepat proses biokimia fotosintesa dan perkembangan tanaman serta mempercepat proses respirasi. Reddy *et al*, (1999) mengatakan bahwa suhu merupakan faktor pembatas dalam pertumbuhan tanaman padi serta menentukan panjang fase pertumbuhan. Suhu yang tinggi dapat menghambat pertumbuhan tanaman padi, karena laju respirasi yang terjadi menjadi lebih besar. Humaerah (2002) juga mengatakan bahwa semua fungsi tanaman sangat tergantung pada proses fotosintesis, bila proses tersebut berlangsung optimal maka proses pertumbuhan dan perkembangan tanaman padi akan berlangsung optimal. Nishiyama dan Tanaka (1976) menyimpulkan bahwa suhu optimal untuk berlangsungnya proses fotosintesis adalah 25-33 °C.

Disamping suhu, curah hujan juga sangat berpengaruh terhadap tanaman padi. Curah hujan merupakan sumber air utama bagi tanaman padi, baik langsung (pada lahan kering) ataupun tidak (lahan beririgasi). Besarnya curah hujan disuatu wilayah berbeda-beda. Di Indonesia satuan curah hujan yang digunakan adalah mm. Tanaman padi sepenuhnya tergantung pada curah hujan, sehingga baik jumlah maupun

distribusinya sangat penting. Curah hujan yang rendah selama masa pertumbuhan akan menurunkan hasil. Riset *IRRI* dan percobaan lain menunjukkan bahwa distribusi curah hujan juga merupakan faktor penting yang mempengaruhi hasil produksi tanaman padi, bahkan pada daerah dengan curah hujan tahunan 2000 mm (De Datta dan Vergara 1975). Secara fisiologis air merupakan kebutuhan vital bagi tanaman padi, karena bagian terbesar dari protoplasma dan lebih dari 90% berat tanaman padi segar adalah air. Disamping itu juga air sebagai pelarut berbagai senyawa/bahan kimia yang ikut dalam proses fisiologis (Bay, 1991). Air mempunyai panas jenis/kapasitas panas yang tinggi sehingga dapat menyerap dan menahan panas lebih efektif dibandingkan senyawa lainnya dalam jaringan tanaman padi. Suhartatik *et al*, (2009) menyimpulkan bahwa curah hujan yang baik untuk pertumbuhan tanaman padi adalah 200 mm perbulan dengan distribusi selama empat bulan. Penanaman padi baik dilakukan pada tanah sawah dengan kandungan fraksi pasir, debu dan lempung dengan perbandingan tertentu serta jumlah hari yang cukup.

Tanaman padi dipandang sebagai suatu yang kompleks dan peka terhadap pengaruh iklim misalnya pemanasan, kelembaban, penyinaran matahari dan lain lain. Tanpa unsur iklim ini, pada umumnya pertumbuhan tanaman padi akan tertahan. Meskipun ada beberapa tanaman yang dapat menyesuaikan diri untuk tetap hidup dalam periode yang cukup lama, jika kekurangan salah satu faktor tersebut diatas. Unsur iklim yang mempengaruhi pertumbuhan tanaman padi adalah curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin (Halmar, dkk,2011).

1. Curah Hujan

Curah hujan dibatasi sebagai tinggi air hujan dalam satuan mm yang diterima oleh permukaan sebelum mengalami aliran, evaporasi dan peresapan kedalam tanah. Keragaman curah hujan menurut ruang sangat dipengaruhi oleh letak geografis, topografi, ketinggian tempat dan pergerakan udara. Sedangkan curah hujan menurut waktu dapat dilihat menurut pola atau siklus yang memiliki frekuensi atau periode ulang. Curah hujan dapat mempengaruhi setiap fase pertumbuhan tanaman. Karena curah hujan yang berlebihan akan

mempengaruhi produktifitas pertumbuhan tanaman yang mengakibatkan tanaman menjadi terganggu, terjangkit hama dan penyakit, bahkan dapat mengakibatkan kematian pada tanaman.

2. Suhu Udara

Suhu udara dan tanah mempengaruhi proses pertumbuhan tanaman. Setiap jenis tanaman mempunyai batas suhu minimum, optimum dan maksimum yang berbeda beda untuk setiap tingkat pertumbuhannya. Gandum dalam musim dingin tahan berada dalam kondisi suhu nisbi rendah dan dapat bertahan dalam suhu beku selama periode musim dingin. Tanaman tropis misalnya coklat memerlukan suhu tinggi sepanjang tahun. Batas atas suhu yang mematikan aktivitas sel sel tanaman berkisar antara 120°C sampai 140°C , tetapi nilai ini beragam sesuai dengan jenis tanaman dan tingkat pertumbuhannya. Suhu tinggi tidak mengkhawatirkan dibandingkan suhu rendah dalam menahan pertumbuhan tanaman asal persediaan air memadai dan tanaman dapat menyesuaikan terhadap daerah iklim. Dalam kondisi yang sangat tinggi, pertumbuhan terhanbat bahkan terhenti tanpa menghiraukan persediaan air, dan kemungkinan keguguran daun atau buah sebelum waktunya. Bencana terhadap tanaman pangan biasanya berasal dari keadaan kering yang sangat panas dan angin yang mempercepat penguapan dan mengakibatkan dehidrasi jaringan tanaman. Suhu udara merupakan faktor lingkungan yang penting, karena berpengaruh pada pertumbuhan tanaman dan berperan hampir pada semua proses pertumbuhan. Suhu udara merupakan faktor penting dalam menentukan tempat dan waktu penanaman yang cocok, bahkan suhu udara dapat juga sebagai faktor penentu dari pusat produksi tanaman.

3. Kecepatan Angin

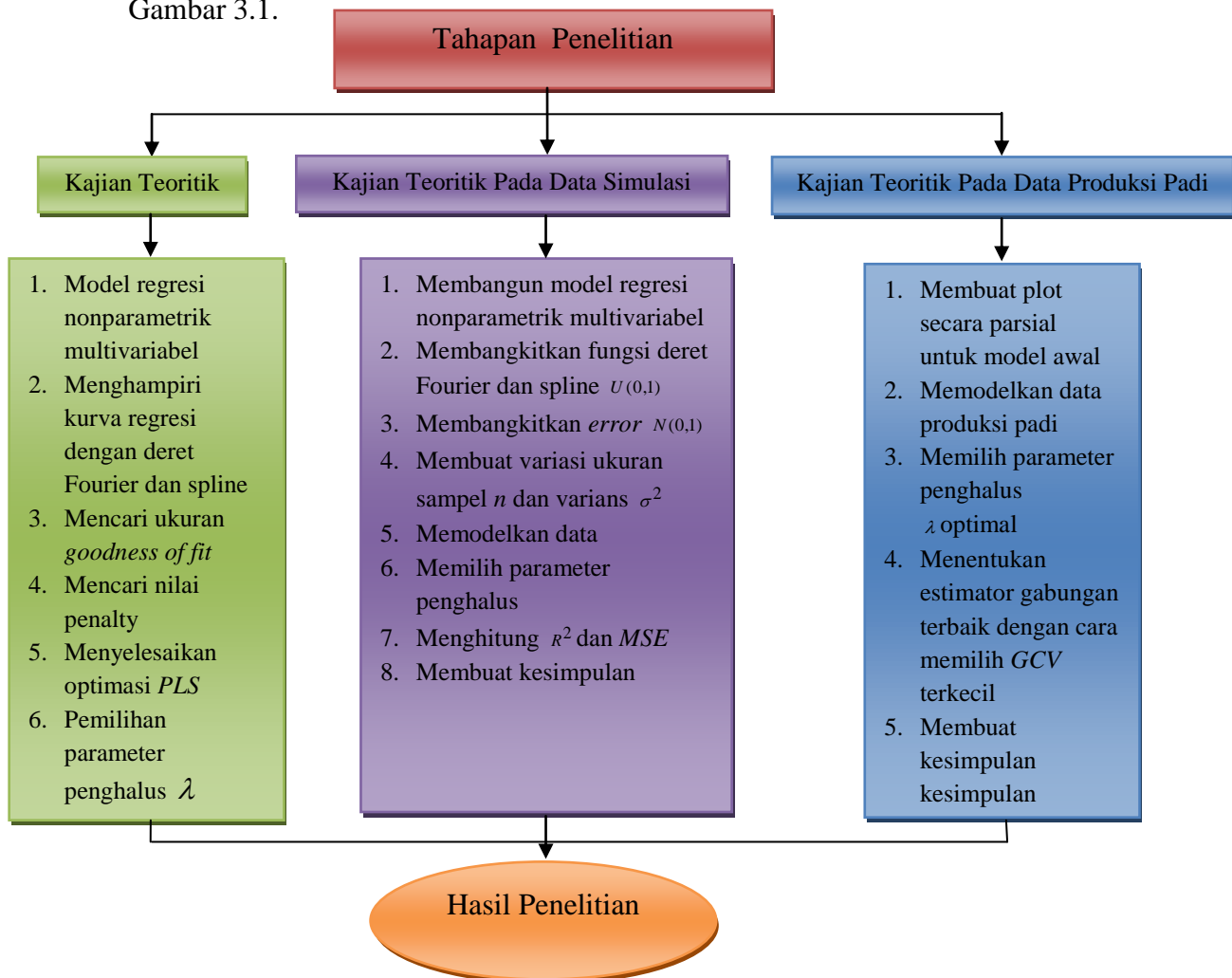
Angin mempunyai efek penting pada produktivitas tanaman pangan. Energi angin merupakan perantara dalam penyebaran tepung sari pada penyerbukan

alamiah, tetapi angin juga dapat menyebarkan benih rumput liar dan melakukan penyerbukan silang yang tidak diinginkan. Angin yang terlalu kencang juga akan mengganggu penyerbukan oleh serangga. Angin dapat membantu dalam menyediakan karbon dioksida yang membantu pertumbuhan tanaman, selain itu juga mempengaruhi suhu dan kelembaban tanah. Namun pada saat musim kemarau di beberapa daerah di Indonesia bertiup angin fohn yang dapat merusak, karena bersifat kering dan panas. Pada siang hari di daerah sekitar pantai, angin laut dapat menyebabkan masalah karena angin ini membawa butiran garam yang dapat merusak daun (Prabandari, dkk., 2015).

BAB 3

METODE PENELITIAN

Ada dua kajian utama yang akan dilakukan pada penelitian ini, yaitu kajian teoritik dan kajian terapan. Kajian teoritik difokuskan pada pengembangan estimator dan pemilihan parameter penghalus optimal gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif. Kajian terapan difokuskan pada penerapan hasil kajian teoritik pada data simulasi dan data riil produksi padi di provinsi Bali pada tahun 2015. Langkah-langkah yang akan dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian, secara garis besar disajikan dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Tahapan Penelitian

3.1 Langkah-langkah Kajian Teoritik

Sub-bab ini merupakan bagian dari langkah kajian teoritik yang bertujuan untuk mengembangkan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif. Pada tahap ini dilakukan langkah-langkah untuk mendapatkan estimasi fungsi regresi adalah sebagai berikut:

1. Diberikan model regresi nonparametrik multivariabel aditif:

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \dots + f_p(x_{pi}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

2. Menghampiri kurva regresi $f_1(x_{1i})$ dengan fungsi deret Fourier

$$f_1(x_{1i}) = b(x_{1i}) + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kx_{1i}.$$

3. Menghampiri kurva regresi $f_2(x_{2i}), f_3(x_{3i}), \dots, f_p(x_{pi})$ dengan fungsi *truncated* spline

$$f_j(x_{ji}) = \sum_{v=1}^m \beta_v x_{ji}^v + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{ji} - t_{uji})_+^m, \quad j = 2, 3, \dots, p$$

$$\text{dengan } (x_{ji} - t_{uji})_+^m = \begin{cases} (x_{ji} - t_{uji})_+^m, & x_{ji} \geq t_{uji} \\ 0, & x_{ji} < t_{uji} \end{cases}$$

4. Mencari ukuran *goodness of fit* untuk optimasi *PLS*:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2$$

5. Mencari nilai *penalty* untuk optimasi *PLS*:

$$\int_0^\pi \frac{2}{\pi} \left(f_1''(x_{1i}) \right)^2 dx_{1i}$$

6. Menyelesaikan optimasi *Penalized Least Squares (PLS)*:

$$\min_{f \in c(0, \pi)} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 + \lambda \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \left(f_1''(x_{1i}) \right)^2 dx_{1i} \right\}$$

3.2 Memilih Parameter Penghalus λ Optimal

Estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif sangat tergantung pada parameter penghalus λ , sehingga perlu dilakukan pemilihan parameter penghalus λ optimal. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

- 1) Menyatakan estimator deret Fourier dan *truncated* spline dalam regresi nonparametrik multivariabel menjadi:

$$\hat{f}_{\lambda}(\lambda) = \mathbf{H}(\lambda)\mathbf{y}$$

- 2) Dikonstruksi vektor :

$$\mathbf{V}(\lambda) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\lambda))\mathbf{y}$$

- 3) Membentuk *norm* :

$$\|\mathbf{V}(\lambda)\|^2 = \|(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\lambda))\mathbf{y}\|^2$$

- 4) Membentuk fungsi :

$$G(\lambda) = \frac{n^{-1} \|\mathbf{V}(\lambda)\|^2}{\{1 - n^{-1} \text{trace}(\mathbf{H}(\lambda))\}^2}$$

- 5) Memilih parameter penghalus λ optimal yang meminimumkan $G(\lambda)$.

3.3 Langkah-langkah Kajian Terapan pada Data Simulasi

Sub-bab ini merupakan bagian dari langkah kajian terapan yang bertujuan untuk mengevaluasi penerapan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif menggunakan data simulasi. Penerapan data simulasi dengan mengambil contoh bentuk fungsi deret Fourier dan polinomial spline *truncated*, untuk mengetahui kebaikan dari model regresi nonparametrik multivariabel aditif yang dikembangkan.

Pada tahap ini akan dilakukan studi simulasi dengan tujuan untuk mendapatkan gambaran tentang kemampuan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik multivariabel. Disamping itu pula simulasi bertujuan untuk mengetahui bagaimana kemampuan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel mendapatkan hasil estimasi yang mendekati nilai aslinya. Adapun langkah-langkah simulasi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

- 1) Membangun model regresi nonparametrik 3 variabel prediktor :

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + f_3(x_{3i}) + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- 2) Membangkitkan x_{1i}, x_{2i} dan x_{3i} dengan skenario untuk x_{1i} merupakan suatu deret Fourier yang dibangkitkan dari distribusi $U(0,1)$ dan $i = 1, 2, \dots, n$. Sedangkan x_{2i}, x_{3i} merupakan suatu fungsi polinomial spline *truncated* masing-masing dibangkitkan dari distribusi $U(0,1)$ dan $i = 1, 2, \dots, n$.
- 3) Menetapkan bentuk fungsi $f_j = (x_{ji})$, $j = 1, 2, 3$ dan $i = 1, 2, \dots, n$ yaitu :

- Untuk x_{1i} adalah kelompok fungsi deret Fourier :

$$f_1(x_{1i}) = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right)$$

- Untuk x_{2i} dan x_{3i} adalah kelompok fungsi spline *truncated* :

$$f_2(x_{2i}) = \beta x_{2i} + \alpha(x_{2i} - u_1)_+.$$

- 4) Membangkitkan *error* ε_i dari distribusi $N(0,1)$.
- 5) Membuat variasi-variasi ukuran sampel n dan varians σ^2 , yaitu $n = 50$, $n = 100$, dan $n = 200$, serta $\sigma^2 = 0,1$, $\sigma^2 = 0,5$ dan $\sigma^2 = 1$.
- 6) Memodelkan data dengan menggunakan estimator deret Fourier dan *truncated* spline.
- 7) Memilih parameter penghalus λ optimal, K optimal dan titik knot optimal menggunakan metode GCV.

- 8) Menghitung nilai R^2 dan MSE untuk masing-masing percobaan.
- 9) Mengambil kesimpulan simulasi tentang kemampuan estimator deret Fourier dan *truncated* spline dalam mengestimasi kurva regresi nonparametrik multivariabel.

3.4 Langkah-langkah Kajian Terapan pada Data Produksi Padi di Provinsi Bali

Sub-bab ini merupakan bagian dari langkah kajian terapan yang bertujuan untuk menerapkan hasil kajian teoritik estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline dalam pemodelan produksi padi berdasarkan variabel luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Adapun langkah-langkah untuk mencapai tujuan penelitian 3 dilakukan berdasarkan data penelitian, definisi operasional variabel dan menganalisis, sebagai berikut:

3.4.1 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data riil tentang produksi padi di beberapa Kecamatan di Provinsi Bali yang merupakan penghasil utama padi. Sebagai prediktor digunakan beberapa variabel yang diduga mempengaruhi produksi padi, yaitu luas lahan panen (x_1), curah hujan (x_2), temperatur udara (x_3) dan kecepatan angin (x_4) pada tahun 2015. Data tentang variabel-variabel penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari Dinas Pertanian, Badan Pusat Statistik (BPS), dan Balai Besar Meteorologi Klimatologi Geofisika (BBMKG) Provinsi Bali. Berdasarkan publikasi BPS Provinsi Bali tahun 2015, diketahui bahwa kabupaten yang termasuk penghasil utama padi di Bali adalah Kabupaten Badung, Tabanan, Gianyar, dan Klungkung. Meskipun demikian, penelitian ini menggunakan data produksi padi 9 kabupaten dan kota yang ada di Provinsi Bali. Unit pengamatan terkecil adalah kecamatan. Oleh karena itu sesuai dengan jumlah kecamatan yang ada di 9 kabupaten dan kota yang ada di Provinsi Bali, unit pengamatan dalam penelitian ini sebanyak 57 kecamatan. Dengan demikian struktur data dalam penelitian ini sesuai dengan yang ditampilkan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Struktur Data Produksi Padi di Provinsi Bali

No	y_i	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}
1	y_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}
2	y_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
57	y_{57}	x_{157}	x_{257}	x_{357}	x_{457}

3.4.2 Definisi Operasional Variabel

Faktor-faktor yang diduga mempengaruhi produksi padi (y) sebagai respon, sedangkan luas lahan panen (x_1), curah hujan (x_2), temperatur udara (x_3) dan kecepatan angin (x_4) sebagai prediktor. Halmar *et al.* (2012) dan Laoh *et al.* (2015) melakukan penelitian produksi padi dengan variabel prediktor luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin mempergunakan model regresi linear berganda. Luas panen sebagai variabel prediktor dalam penelitian Laoh *et al.* (2015) dalam setiap wilayah berbeda-beda. Hal ini mengindikasikan bahwa pola luas panen berubah pada setiap wilayah tertentu. Bey *et al.* (1991) curah hujan merupakan sumber air utama bagi tanaman padi baik langsung maupun tidak langsung. Tanaman padi sepenuhnya bergantung pada curah hujan, sehingga baik jumlah maupun distribusinya sangat penting. Curah hujan yang rendah selama masa pertumbuhan akan menurunkan hasil produksi padi. Reddy *et al.* (1999) mengatakan bahwa suhu merupakan faktor pembatas dalam pertumbuhan tanaman padi serta menentukan panjang fase pertumbuhan. Suhu berpengaruh pada laju proses metabolisme, perkembangan pembentukan daun pada tanaman padi. Suhu yang tinggi dapat menghambat pertumbuhan tanaman, karena laju respirasi yang terjadi menjadi lebih besar. Humaerah (2002) mengatakan bahwa angin mempunyai efek penting pada produktivitas tanaman padi. Energi angin merupakan perantara dalam penyebaran tepung sari dalam penyerbukan alamiah, tetapi angin juga dapat menyebarkan benih rumput liar dan melakukan penyerbukan silang yang tidak diinginkan. Angin yang

terlalu kencang juga akan mengganggu penyerbukan oleh serangga. Angin dapat membantu dalam menyediakan karbon dioksida yang membantu pertumbuhan tanaman padi. Berdasarkan pada latar belakang, permasalahan dan tujuan penelitian, beberapa variabel yang menjadi objek penelitian diberikan beberapa batasan operasional sebagai berikut.

- a. BPS (2012) mendefinisikan bahwa produksi padi sawah adalah produksi kotor dalam bentuk standar yang berbentuk Gabah Kering Panen (GKP) dengan kadar air 22-23 persen dengan satuan ton.
- b. BPS (2012) mendefinisikan bahwa luas panen padi sawah adalah luas tanaman padi sawah yang dipungut hasilnya setelah tanaman tersebut cukup umur, termasuk tanaman yang hasilnya sebagian saja dapat dipungut (paling sedikit sampai dengan 10 persen) yang mungkin disebabkan karena mendapat serangan organisme pengganggu tumbuhan atau bencana alam dengan satuan hektar ha.
- c. BBMKG (2015) mendefinisikan bahwa curah hujan merupakan ketinggian air hujan yang terkumpul dalam tempat yang datar tidak menguap, tidak meresap dan tidak mengalir dengan satuan milimeter mm.
- d. BBMKG (2015) mendefinisikan bahwa temperatur adalah besaran yang menyatakan derajat panas, dingin suatu benda atau kondisi yang dirasakan di permukaan bumi sebagai panas, sejuk dan dingin dengan satuan derajat celsius ($^{\circ}\text{C}$).
- e. BBMKG (2015) mendefinisikan bahwa kecepatan angin adalah kecepatan udara yang bergerak akibat adanya perbedaan tekanan udara dengan arah aliran angin dari tempat yang memiliki tekanan tinggi ke tempat yang bertekanan rendah atau daerah yang memiliki suhu rendah ke daerah yang memiliki suhu tinggi dengan satuan Knot

3.4.3 Langkah-langkah Analisis

Sub-bab ini menguraikan tentang langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan untuk menerapkan model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel aditif pada data produksi padi di Provinsi Bali tahun 2015. Adapun langkah analisis yang dilakukan sebagai berikut:

- 1) Membuat plot secara parsial antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor untuk menentukan model awal.
- 2) Memodelkan data produksi padi di Provinsi Bali dengan estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline multivariabel.
- 3) Memilih parameter penghalus λ optimal estimator gabungan deret Fourier dan *truncated* spline multivariabel prediktor menggunakan metode *GCV*.
- 4) Menentukan estimator deret Fourier dan *truncated* spline multivariabel prediktor terbaik yang mempunyai *GCV* terkecil.
- 5) Membuat kesimpulan.

BAB 4

ESTIMASI PARAMETER GABUNGAN DERET FOURIER DAN SPLINE *TRUNCATED*

Bab ini menyajikan hasil pembahasan teori untuk menjawab tujuan 1 dalam penelitian. Pembahasan difokuskan pada pengembangan bentuk estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariable aditif. Dikaji juga pengembangan metode pemilihan parameter penghalus optimal untuk memilih nilai osilasi K pada estimator deret Fourier dan titik knot yang optimal pada estimator spline *truncated*. Metode yang digunakan untuk mendapatkan estimasi fungsi regresi adalah metode *PLS*. Sedangkan pemilihan parameter penghalus menggunakan metode *GCV*. Hasil pembahasan teori diperoleh berdasarkan tahapan metodologi pada Bab 3, yang hasilnya dijabarkan dalam sub bab dibawah ini.

4.1 Model Regresi Nonparametrik Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated*

Deret Fourier merupakan suatu polinomial dengan basis fungsi cosinus yang mempunyai fleksibilitas sehingga dapat menyesuaikan secara efektif terhadap sifat lokal data. Deret Fourier baik digunakan untuk menjelaskan kurva bersifat periodic seperti gelombang sinus dan cosinus. Spline *truncated* merupakan jumlahan dari fungsi polinomial dengan suatu fungsi *truncated*. Spline *truncated* digunakan untuk menunjukkan fungsi/data dimana terdapat perubahan pola perilaku kurva yang berubah-ubah pada interval yang berlainan.

Diberikan data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, y_i)$, hubungan antara $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}$ dengan y_i dimodelkan dengan regresi nonparametrik multivariabel aditif :

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \dots + f_p(x_{pi}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

dengan y_i variabel respon, $f_j(x_{ji})$, $j=1,2,\dots,p$ adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan ε_i error random yang diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol dan varians σ^2 . Model regresi (4.1.) dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$y_i = \sum_{j=1}^p f_j(x_{ji}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Misalkan $f_1(x_{1i})$ didekati dengan fungsi deret Fourier sebagaimana persamaan (4.3).

$$f_1(x_{1i}) = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kx_{1i}, \quad (4.3)$$

dan kurva regresi $f_2(x_{2i}), f_3(x_{3i}), \dots, f_p(x_{pi})$ didekati dengan fungsi spline *truncated* derajat m dan titik-titik knot t_1, t_2, \dots, t_r :

$$f_j(x_{ji}) = \sum_{v=1}^m \beta_{vj} x_{ji}^v + \sum_{u=1}^r \alpha_{uj} (x_{ji} - t_{uj})_+^m, \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (4.4)$$

$$\text{dengan } (x_j - t_{uj})_+^m = \begin{cases} (x_j - t_{uj})^m; & x_j \geq t_{uj} \\ 0 & ; x_j < t_{uj} \end{cases}.$$

Model regresi (4.2) dapat disajikan dalam bentuk

$$y = bx_1 + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kx_1 + \sum_{v=1}^m \beta_{v2} x_2^v + \sum_{u=1}^r \alpha_{u2} (x_2 - t_{u2})_+^m + \sum_{v=1}^m \beta_{v3} x_3^v + \sum_{u=1}^r \alpha_{u3} (x_3 - t_{u3})_+^m + \dots + \sum_{v=1}^m \beta_{vp} x_p^v + \sum_{u=1}^r \alpha_{up} (x_p - t_{up})_+^m \quad (4.5)$$

dengan $b, \alpha_0, \alpha_k, k=1, 2, \dots, K, \beta_v, v=1, 2, \dots, m$ dan $\alpha_u, u=1, 2, \dots, r$ merupakan parameter-parameter model. Selanjutnya model regresi (4.5) dapat disajikan sebagai berikut:

$$y = bx_1 + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x_{1i} + \dots + a_K \cos Kx_{1i} + \beta_{12} x_{2i}^1 + \dots + \beta_{m2} x_{2i}^m + \alpha_{12} (x_{2i} - t_{12})_+^m + \dots + \alpha_{r2} (x_{2i} - t_{r2})_+^m + \beta_{13} x_{3i}^1 + \dots + \beta_{m3} x_{3i}^m + \alpha_{13} (x_{3i} - t_{13})_+^m + \dots + \alpha_{r3} (x_{3i} - t_{r3})_+^m + \dots + \beta_{1p} x_{pi}^1 + \dots + \beta_{mp} x_{pi}^m +$$

$$\alpha_{1p}(x_{pi} - t_{1p})_+^m + \dots + \alpha_{rp}(x_{pi} - t_{rp})_+^m + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk $i=1$, diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} y = & bx_{11} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x_{11} + \dots + a_K \cos Kx_{11} + \beta_{12}x_{21}^1 + \dots + \beta_{m2}x_{21}^m + \\ & \alpha_{12}(x_{21} - t_{12})_+^m + \dots + \alpha_{r2}(x_{21} - t_{r2})_+^m + \beta_{13}x_{31}^1 + \dots + \beta_{m3}x_{31}^m + \\ & \alpha_{13}(x_{31} - t_{13})_+^m + \dots + \alpha_{r3}(x_{31} - t_{r3})_+^m + \dots + \beta_{1p}x_{p1}^1 + \dots + \beta_{mp}x_{p1}^m + \\ & \alpha_{1p}(x_{p1} - t_{1p})_+^m + \dots + \alpha_{rp}(x_{p1} - t_{rp})_+^m + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Untuk $i = 2$, diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} y = & bx_{12} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x_{12} + \dots + a_K \cos Kx_{12} + \beta_{12}x_{22}^1 + \dots + \beta_{m2}x_{22}^m + \\ & \alpha_{12}(x_{22} - t_{12})_+^m + \dots + \alpha_{r2}(x_{22} - t_{r2})_+^m + \beta_{13}x_{32}^1 + \dots + \beta_{m3}x_{32}^m + \\ & \alpha_{13}(x_{32} - t_{13})_+^m + \dots + \alpha_{r3}(x_{32} - t_{r3})_+^m + \dots + \beta_{1p}x_{p2}^1 + \dots + \beta_{mp}x_{p2}^m + \\ & \alpha_{1p}(x_{p2} - t_{1p})_+^m + \dots + \alpha_{rp}(x_{p2} - t_{rp})_+^m + \varepsilon_2. \\ & \vdots \end{aligned}$$

Untuk $i = n$, diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} y = & bx_{1n} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x_{1n} + \dots + a_K \cos Kx_{1n} + \beta_{12}x_{2n}^1 + \dots + \beta_{m2}x_{2n}^m + \\ & \alpha_{12}(x_{2n} - t_{12})_+^m + \dots + \alpha_{r2}(x_{2n} - t_{r2})_+^m + \beta_{13}x_{3n}^1 + \dots + \beta_{m3}x_{3n}^m + \\ & \alpha_{13}(x_{3n} - t_{13})_+^m + \dots + \alpha_{r3}(x_{3n} - t_{r3})_+^m + \dots + \beta_{1p}x_{pn}^1 + \dots + \beta_{mp}x_{pn}^m + \\ & \alpha_{1p}(x_{pn} - t_{1p})_+^m + \dots + \alpha_{rp}(x_{pn} - t_{rp})_+^m + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Apabila model regresi disajikan dalam bentuk matriks didapat:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cos 2x_{11} & \dots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cos 2x_{12} & \dots & \cos Kx_{12} \\ x_{13} & 1/2 & \cos x_{13} & \cos 2x_{13} & \dots & \cos Kx_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cos 2x_{1n} & \dots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} x_{21}^1 & x_{21}^2 & \cdots & x_{21}^m & (x_{21}-t_{12})_+^m & (x_{21}-t_{22})_+^m & \cdots & (x_{21}-t_{r2})_+^m \\ x_{22}^1 & x_{22}^2 & \cdots & x_{22}^m & (x_{22}-t_{12})_+^m & (x_{22}-t_{22})_+^m & \cdots & (x_{22}-t_{r2})_+^m \\ x_{23}^1 & x_{23}^2 & \cdots & x_{23}^m & (x_{23}-t_{12})_+^m & (x_{23}-t_{22})_+^m & \cdots & (x_{23}-t_{r2})_+^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n}^1 & x_{2n}^2 & \cdots & x_{2n}^m & (x_{2n}-t_{12})_+^m & (x_{2n}-t_{22})_+^m & \cdots & (x_{2n}-t_{r2})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{m2} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{r2} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} x_{31}^1 & x_{31}^2 & \cdots & x_{31}^m & (x_{31}-t_{13})_+^m & (x_{31}-t_{23})_+^m & \cdots & (x_{31}-t_{r3})_+^m \\ x_{32}^1 & x_{32}^2 & \cdots & x_{32}^m & (x_{32}-t_{13})_+^m & (x_{32}-t_{23})_+^m & \cdots & (x_{32}-t_{r3})_+^m \\ x_{33}^1 & x_{33}^2 & \cdots & x_{33}^m & (x_{33}-t_{13})_+^m & (x_{33}-t_{23})_+^m & \cdots & (x_{33}-t_{r3})_+^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{3n}^1 & x_{3n}^2 & \cdots & x_{3n}^m & (x_{3n}-t_{13})_+^m & (x_{3n}-t_{23})_+^m & \cdots & (x_{3n}-t_{r3})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \vdots \\ \beta_{m3} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \vdots \\ \alpha_{r3} \end{bmatrix} + \cdots + \\
& \begin{bmatrix} x_{p1}^1 & x_{p1}^2 & \cdots & x_{p1}^m & (x_{p1}-t_{1p})_+^m & (x_{p1}-t_{2p})_+^m & \cdots & (x_{p1}-t_{rp})_+^m \\ x_{p2}^1 & x_{p2}^2 & \cdots & x_{p2}^m & (x_{p2}-t_{1p})_+^m & (x_{p2}-t_{2p})_+^m & \cdots & (x_{p2}-t_{rp})_+^m \\ x_{p3}^1 & x_{p3}^2 & \cdots & x_{p3}^m & (x_{p3}-t_{1p})_+^m & (x_{p3}-t_{2p})_+^m & \cdots & (x_{p3}-t_{rp})_+^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pn}^1 & x_{pn}^2 & \cdots & x_{pn}^m & (x_{pn}-t_{1p})_+^m & (x_{pn}-t_{2p})_+^m & \cdots & (x_{pn}-t_{rp})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1p} \\ \beta_{2p} \\ \vdots \\ \beta_{mp} \\ \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{rp} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya model di atas dapat ditulis menjadi bentuk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{X}_2(\mathbf{t}_2)\beta_2 + \mathbf{X}_3(\mathbf{t}_3)\beta_3 + \dots + \mathbf{X}_p(\mathbf{t}_p)\beta_p + \varepsilon \\
&= \mathbf{W}\mathbf{a} + \sum_{j=1}^p \mathbf{X}_j(\mathbf{t}_j)\beta_j + \varepsilon,
\end{aligned}$$

dengan:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)', \mathbf{a} = (b, a_0, a_1, \dots, a_k)', \beta_j = (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{mj}, \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{rj}) \text{ dan}$$

$$\mathbf{t}_j = (t_{1j}, \dots, t_{rj})', j = 2, 3, \dots, p.$$

Matriks \mathbf{W} diberikan oleh:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cos 2x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cos 2x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ x_{13} & 1/2 & \cos x_{13} & \cos 2x_{13} & \cdots & \cos Kx_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cos 2x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\mathbf{X}_j(\mathbf{t}_j) = \begin{bmatrix} x_{j1} & x_{j1}^2 & \cdots & x_{j1}^m & (x_{j1} - t_{1j})_+^m & (x_{j1} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{j1} - t_{rj})_+^m \\ x_{j2} & x_{j2}^2 & \cdots & x_{j2}^m & (x_{j2} - t_{1j})_+^m & (x_{j2} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{j2} - t_{rj})_+^m \\ x_{j3} & x_{j3}^2 & \cdots & x_{j3}^m & (x_{j3} - t_{1j})_+^m & (x_{j3} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{j3} - t_{rj})_+^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{jn} & x_{jn}^2 & \cdots & x_{jn}^m & (x_{jn} - t_{1j})_+^m & (x_{jn} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{jn} - t_{rj})_+^m \end{bmatrix},$$

dengan $j = 2, 3, \dots, p$.

4.2 Bentuk Estimator Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated* dalam Regresi Nonparametrik Multivariabel Aditif

Pada bagian ini diturunkan bentuk estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, yang diberikan oleh persamaan regresi (4.1). Kurva regresi $f_1(x_{1i})$ diasumsikan termuat dalam ruang $C(0, \pi)$.

Estimasi $f_j(x_{ji})$, $j = 1, 2, \dots, p$ diperoleh dari optimasi:

$$\min_{\substack{f_1 \in C(0, \pi) \\ \beta \in R^{(p-1)(m+r)}}} \left\{ R(f_1, f_2, \dots, f_p) \right\} = \min_{\substack{f_1 \in C(0, \pi) \\ \beta \in R^{(p-1)(m+r)}}} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 \right\} \quad (4.6)$$

dengan syarat:

$$j(f_1) = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \{ f_1^{(2)}(x_{1i}) \}^2 dx_{1i} \leq \rho, \quad \rho \geq 0. \quad (4.7)$$

Penyelesaian optimasi (4.6) dengan syarat (4.7) ekuivalen dengan menyelesaikan optimasi:

$$\min_{\substack{f_1 \in C(0, \pi) \\ \beta \in \mathbb{R}^{(p-1)(m+r)}}} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 + \lambda \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \left(f_1^{(2)}(x_{1i}) \right)^2 dx_{1i} \right\}. \quad (4.8)$$

Parameter λ merupakan parameter penghalus yang mengontrol antara *goodness of fit* $R(f_1, f_2, \dots, f_p)$ dan kemulusan fungsi $j(f_1)$. Fungsi $f_1^{(2)}$ menyatakan turunan kedua dari fungsi f_1 . Karena $f_1 \in C(0, \pi)$, maka fungsi f_1 dapat dihampiri dengan fungsi deret Fourier seperti persamaan (4.3). Sedangkan fungsi f_j , $j = 2, 3, \dots, p$ didekati dengan fungsi spline *truncated* seperti pada Persamaan (4.4).

Bentuk estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang didapat dari optimasi (4.8) diberikan oleh Teorema 4.2.1. Sebelum memberikan Teorema 4.2.1, terlebih dahulu diberikan beberapa Lemma yang berkaitan dengan pembuktian Teorema 4.2.1.

Lemma 4.2.1

Jika diberikan fungsi deret Fourier f_1 seperti pada persamaan (4.3), maka

$$J(f_1) = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \left(f_1^{(2)}(x_1) \right)^2 dx_1 = \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2.$$

Bukti:

Karena $f_1(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kx_1$, maka

$$\begin{aligned} f_1^{(2)}(x_1) &= \frac{d}{dx_1} \left[\frac{d}{dx_1} \left(bx_1 + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kx_1 \right) \right] \\ &= \frac{d}{dx_1} \left(b - \sum_{k=1}^K ka_k \sin kx_1 \right) \\ &= - \sum_{k=1}^K ka_k \cos kx_1. \end{aligned}$$

Akibatnya:

$$\left(f_1^{(2)}(x_1) \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^K k^2 a_k \cos kx_1 \right)^2.$$

Penalty $J(f_1)$ menjadi :

$$\begin{aligned}
 J(f_1) &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^K k^2 a_k \cos kx_1 \right)^2 dx_1 \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^K k^2 a_k \cos kx_1 \right)^2 dx_1 \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \sum_{k=1}^K (k^2 a_k \cos kx_1)^2 + 2 \sum_{k < j}^K (k^2 a_k \cos kx_1)(j^2 a_j \cos jx_1) \right\} dx_1 \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=1}^K (k^2 a_k \cos kx_1)^2 dx_1 + \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k < j}^K (k^2 a_k \cos kx_1)(j^2 a_j \cos jx_1) dx_1.
 \end{aligned}$$

Misalkan:

$$A = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_0^\pi (k^2 a_k \cos kx_1)^2 dx_1, \text{ dan}$$

$$B = \frac{2}{\pi} 2 \sum_{k < j}^K \int_0^\pi (k^2 a_k \cos kx_1)(j^2 a_j \cos jx_1) dx_1.$$

Dicari terlebih dahulu nilai untuk A dan B sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_0^\pi (k^2 a_k \cos kx_1)^2 dx_1 \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_0^\pi k^4 a_k^2 \cos^2 kx_1 dx_1 \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \int_0^\pi \cos^2 kx_1 dx_1 \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \int_0^\pi \frac{1 + 2 \cos kx_1}{2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \left[x_1 + \frac{2}{k} \sin kx_1 \right]_0^\pi \\
 &= \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Selanjutnya nilai B diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K \int_0^{\pi} (k^2 a_k \cos kx_1) (j^2 a_j \cos jx_1) dx_1 \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k < j}^K (kj)^2 a_k a_j \cos kx_1 \cos jx_1 dx_1 \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K (kj)^2 a_k a_j \int_0^{\pi} \cos kx_1 \cos jx_1 dx_1 \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K (kj)^2 a_k a_j \int_0^{\pi} \frac{\cos(k+j)x_1 + \cos(k-j)x_1}{2} dx_1 \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k < j}^K (kj)^2 a_k a_j \left[\frac{1}{(k+j)} \sin(k+j)x_1 + \frac{1}{(k-j)} \sin(k-j)x_1 \right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Berdasarkan persamaan (4.9) dan (4.10) diperoleh :

$$\begin{aligned}
J(f_1) &= A + B \\
&= \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Lemma 4.2.1 dapat pula disajikan dalam bentuk matriks. Bentuk matriks Lemma 4.2.1 diberikan oleh akibat 4.2.1.

Akibat 4.2.1

Jika $J(f_1)$ diberikan oleh persamaan (4.9), maka

$J(f_1) = \mathbf{a}' \mathbf{D} \mathbf{a}$, dimana,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1^4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K^4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} b \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix}$$

Bukti :

Berdasarkan Lemma 4.2.1 diperoleh:

$$J(f_1) = \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2$$

$$= (b, a_0, a_1, a_2, \dots, a_K) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1^4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{a}' \mathbf{D} \mathbf{a}.$$

Disamping memerlukan Lemma 4.2.1, dan Akibat 4.2.1, Teorema 4.2.1 juga memerlukan Lemma 4.2.2, berikut:

Lemma 4.2.2.

Jika f_1 didekati dengan fungsi deret Fourier (4.3) dan f_j , $j = 2, 3, \dots, p$ didekati dengan fungsi spline *truncated* (4.4), maka *goodness of fit* $R(\mathbf{f})$ dapat disajikan dalam bentuk :

$$R(\mathbf{f}) = n^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}),$$

dengan:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_p)', \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)', \mathbf{a} = (b, a_0, a_1, \dots, a_k)' \text{ dan}$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{11}, \dots, \beta_{m2}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{r2}, \vdots \dots \vdots \beta_{1p}, \dots, \beta_{mp}, \alpha_{1p}, \dots, \alpha_{rp})'$$

Matriks \mathbf{W} dan \mathbf{X} diberikan oleh :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cos 2x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cos 2x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ x_{13} & 1/2 & \cos x_{13} & \cos 2x_{13} & \cdots & \cos Kx_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cos 2x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{X} = (X_2, X_3, \dots, X_p),$$

dimana

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} x_{j1} & x_{j1}^2 & \cdots & x_{j1}^m & (x_{j1} - t_{1j})_+^m & (x_{j1} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{j1} - t_{rj})_+^m \\ x_{j2} & x_{j2}^2 & \cdots & x_{j2}^m & (x_{j2} - t_{1j})_+^m & (x_{j2} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{j2} - t_{rj})_+^m \\ x_{j3} & x_{j3}^2 & \cdots & x_{j3}^m & (x_{j3} - t_{1j})_+^m & (x_{j3} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{j3} - t_{rj})_+^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{jn} & x_{jn}^2 & \cdots & x_{jn}^m & (x_{jn} - t_{1j})_+^m & (x_{jn} - t_{2j})_+^m & \cdots & (x_{jn} - t_{rj})_+^m \end{bmatrix},$$

dengan $j = 2, 3, \dots, p$.

Bukti

$$R(\mathbf{f}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - bx_1 - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{k=1}^K a_k \cos kx_{1i} - \sum_{v=1}^m \beta_{v2} x_{2i}^v - \sum_{u=1}^r \alpha_{u2} (x_{2i} - t_{u2})_+^m + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{v=1}^m \beta_{v3} x_{3i}^v - \sum_{u=1}^r \alpha_{u3} (x_{3i} - t_{u3})_+^m - \cdots - \sum_{v=1}^m \beta_{vp} x_{ji}^v - \sum_{u=1}^r \alpha_{up} (x_{ji} - t_{uj})_+^m \right)^2 \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - bx_1 - \frac{1}{2}a_0 - a_1 \cos x_{1i} - \cdots - a_K \cos Kx_{1i} - \beta_{12} x_{2i}^1 - \cdots - \beta_{m2} x_{2i}^m + \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{12} (x_{2i} - t_{12})_+^m - \cdots - \alpha_{p2} (x_{2i} - t_{p2})_+^m - \beta_{13} x_{3i}^1 - \cdots - \beta_{m3} x_{3i}^m + \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{13} (x_{3i} - t_{13})_+^m - \cdots - \alpha_{p3} (x_{3i} - t_{p3})_+^m - \cdots - \beta_{1p} x_{pi}^1 - \cdots - \beta_{mp} x_{pi}^m + \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{1p} (x_{pi} - t_{1p})_+^m - \cdots - \alpha_{rp} (x_{pi} - t_{rp})_+^m \right)^2. \end{aligned}$$

$$= n^{-1} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} \right) +$$

$$- \begin{bmatrix} x_{21} & \cdots & x_{21}^m & (x_{21} - t_{12})_+^m & \cdots & (x_{p1} - t_{rp})_+^m \\ x_{22} & \cdots & x_{22}^m & (x_{22} - t_{12})_+^m & \cdots & (x_{p2} - t_{rp})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n} & \cdots & x_{2n}^m & (x_{2n} - t_{12})_+^m & \cdots & (x_{pn} - t_{rp})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{m2} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{r2} \end{bmatrix} - \cdots +$$

$$- \begin{bmatrix} x_{p1} & \cdots & x_{p1}^m & (x_{p1} - t_{1p})_+^m & \cdots & (x_{p1} - t_{rp})_+^m \\ x_{p2} & \cdots & x_{p2}^m & (x_{p2} - t_{1p})_+^m & \cdots & (x_{p2} - t_{rp})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pn} & \cdots & x_{pn}^m & (x_{pn} - t_{1p})_+^m & \cdots & (x_{pn} - t_{rp})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{mp} \\ \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{rp} \end{bmatrix} \times$$

$$\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} x_{21} & \cdots & x_{21}^m & (x_{21} - t_{12})_+^m & \cdots & (x_{p1} - t_{rp})_+^m \\ x_{22} & \cdots & x_{22}^m & (x_{22} - t_{12})_+^m & \cdots & (x_{p2} - t_{rp})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n} & \cdots & x_{2n}^m & (x_{2n} - t_{12})_+^m & \cdots & (x_{pn} - t_{rp})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{m2} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{r2} \end{bmatrix} - \cdots +$$

$$- \begin{bmatrix} x_{p1} & \cdots & x_{p1}^m & (x_{p1} - t_{1p})_+^m & \cdots & (x_{p1} - t_{rp})_+^m \\ x_{p2} & \cdots & x_{p2}^m & (x_{p2} - t_{1p})_+^m & \cdots & (x_{p2} - t_{rp})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pn} & \cdots & x_{pn}^m & (x_{pn} - t_{1p})_+^m & \cdots & (x_{pn} - t_{rp})_+^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{mp} \\ \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{rp} \end{bmatrix} \times$$

$$= n^{-1} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right)' \times$$

$$\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right)$$

dengan:

$$X = (X_2, X_3, \dots, X_p),$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} x_{j1} & \cdots & x_{j1}^m & (x_{j1} - t_{1j})_+^m & \cdots & (x_{j1} - t_{rj})_+^m \\ x_{j2} & \cdots & x_{j2}^m & (x_{j2} - t_{1j})_+^m & \cdots & (x_{j2} - t_{rj})_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{jn} & \cdots & x_{jn}^m & (x_{jn} - t_{1j})_+^m & \cdots & (x_{jn} - t_{rj})_+^m \end{bmatrix}, j = 2, 3, \dots, p$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{11}, \dots, \beta_{m2}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{r2}, \vdots \dots \vdots \beta_{1p}, \dots, \beta_{mp}, \alpha_{1p}, \dots, \alpha_{rp})'$$

Akibatnya *goodness of fit* $R(\mathbf{f})$ diberikan oleh :

$$R(\mathbf{f}) = n^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}),$$

dengan:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1/2 & \cos x_{11} & \cos 2x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} \\ x_{12} & 1/2 & \cos x_{12} & \cos 2x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} \\ x_{13} & 1/2 & \cos x_{13} & \cos 2x_{13} & \cdots & \cos Kx_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & 1/2 & \cos x_{1n} & \cos 2x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\mathbf{a} = (b, a_0, a_1, \dots, a_K)', \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'. \quad \blacksquare$$

Dengan menggunakan Lemma 4.2.1, akibat 4.2.1 dan Lemma 4.2.2 bentuk estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* diberikan oleh Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.1

Jika diberikan model regresi yang disajikan dalam bentuk persamaan (4.1), dan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* diperoleh dari optimasi (4.8), maka estimator untuk fungsi $f_1(x_1)$ dan $f_j(x_j)$, $j = 2, 3, \dots, p$ diberikan oleh:

$$\hat{f}_1(x_1) = \hat{b}x_1 + \frac{1}{2}\hat{a}_0 + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k \cos kx_1, \text{ dan}$$

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{v=1}^m \hat{\beta}_{vj} x_j^v + \sum_{u=1}^r \hat{\alpha}_{uj} (x_j - t_{uj})_+^m, j = 2, 3, \dots, p,$$

dimana $\hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_k, k = 1, 2, \dots, K, \hat{\beta}_{vj}, v = 1, 2, \dots, m$ dan $\hat{\alpha}_{uj}, u = 1, 2, \dots, r$,

$j = 2, 3, \dots, p$ diperoleh dari persamaan:

$$\hat{\mathbf{a}}(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_K)' = A(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}, \mathbf{t} = (\mathbf{t}_2', \mathbf{t}_3', \dots, \mathbf{t}_p')$$
 dan

$$\hat{\beta}(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\hat{\beta}_{11}, \dots, \hat{\beta}_{m2}, \hat{\alpha}_{12}, \dots, \hat{\alpha}_{r2}, \dots, \hat{\beta}_{1p}, \dots, \hat{\beta}_{mp}, \hat{\alpha}_{1p}, \dots, \hat{\alpha}_{rp})' = B(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y},$$

dimana,

$$B(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'), \text{ dan}$$

$$A(K, \mathbf{t}, \lambda) = S(K, \lambda) \mathbf{W}' \left(\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}') \right)$$

dengan $S(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\mathbf{W}'\mathbf{W} + n\lambda\mathbf{D})^{-1}$.

Bukti:

Estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* diperoleh dari optimasi:

$$\underset{\substack{f_1 \in C(0, \pi) \\ \beta \in R^{(p-1)(m+r)}}}{\text{Min}} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 + \lambda \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \left(f_1^{(2)}(x_{1i}) \right)^2 \partial x_{1i} \right\}. \quad (4.13)$$

Berdasarkan Lemma 4.2.2 didapat:

$$R(f) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - f_1(x_{1i}) - \sum_{j=2}^p f_j(x_{ji}) \right)^2 = n^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 4.2.1 dan Akibat 4.2.1 didapat:

$$J(f_1) = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \{f_1^{(2)}(x_{1i})\}^2 \partial x_{1i} = \mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a}.$$

Dengan menggabungkan *goodness of fit* $R(f)$ dan Penalty $J(f_1)$, optimasi (4.8), dapat disajikan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \underset{\substack{f_1 \in C(0, \pi) \\ \beta \in R^{(p-1)(m+r)}}}{Min} &= \underset{\substack{a \in R^{K+2} \\ \beta \in R^{(p-1)(m+r)}}}{Min} \left\{ n^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a} \right\} \\ &= \underset{\substack{a \in R^{K+2} \\ \beta \in R^{(p-1)(m+r)}}}{Min} \left\{ \mathbb{Q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \right\} \end{aligned}$$

Estimasi \mathbf{a} dan $\boldsymbol{\beta}$ didapat dengan cara menderivatiskan secara parsial $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ terhadap \mathbf{a} dan $\boldsymbol{\beta}$. Pertama diuraikan bentuk dari $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) &= n^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a} \\ &= n^{-1} (\mathbf{y}' - \mathbf{a}'\mathbf{W}' - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}') (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a} \\ &= n^{-1} (\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{W}\mathbf{a} + \\ &\quad + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a} \\ &= n^{-1} \mathbf{y}'\mathbf{y} - n^{-1} \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1} \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n^{-1} (\mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{y})' + n^{-1} (\mathbf{a}'\mathbf{W}'\boldsymbol{\beta}\mathbf{X})' - n^{-1} \mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \\ &\quad + n^{-1} \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + n^{-1} \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}' (n^{-1} \mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda \mathbf{D}) \mathbf{a} \\ &= n^{-1} \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2n^{-1} \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1} \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2n^{-1} \mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - n^{-1} \mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \\ &\quad + n^{-1} \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}' (n^{-1} \mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda \mathbf{D}) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Untuk meminimumkan $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ diperoleh dengan cara menurunkan secara parsial $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ terhadap \mathbf{a} dan hasilnya disamakan dengan nol.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)}{\partial \mathbf{a}} &= -2n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} + 2n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}\beta + 2(n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})\mathbf{a} \\ &= 2(-n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} + n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}\beta + (n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Dengan menyamakan $\frac{\partial \mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)}{\partial \mathbf{a}} = 0$ didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}-(n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}\beta) + (n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})\mathbf{a} &= 0 \\ (n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}) &= (n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})\hat{\mathbf{a}}.\end{aligned}$$

Dengan mengkalikan kedua ruas dengan $(n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})^{-1}$ didapat:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &= (n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})^{-1}(n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= (n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W} + \lambda\mathbf{D})^{-1}(n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= (\mathbf{W}'\mathbf{W} + n\lambda\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{W}'\mathbf{y} - \mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= (\mathbf{W}'\mathbf{W} + n\lambda\mathbf{D})^{-1}\mathbf{W}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= S(K, \lambda)\mathbf{W}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Kuantitas $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)$ dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta) &= n^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{y} - n^{-1}\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{W}\mathbf{a} + n^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{W}\mathbf{a} + n^{-1}\beta'\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a} - n^{-1}(\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y})' + \\ &\quad + n^{-1}(\beta'\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a})' + n^{-1}\beta'\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + \lambda\mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a} \\ &= n^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{y} - n^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{y} - 2n^{-1}\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y} + n^{-1}\mathbf{y}'\mathbf{W}\mathbf{a} + n^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{W}'\mathbf{W}\mathbf{a} + \\ &\quad + 2n^{-1}\beta'\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a} + n^{-1}\beta'\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + \lambda\mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Untuk meminimumkan $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)$ diperoleh dengan cara menurunkan secara parsial $\mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)$ terhadap β dan hasilnya disamakan dengan nol.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)}{\partial \beta} &= -2n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a} + 2n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta \\ &= 2n^{-1}(-\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta).\end{aligned}$$

Dengan menyamakan $\frac{\partial \mathbb{Q}(\mathbf{a}, \beta)}{\partial \beta} = 0$ didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$2n^{-1}((-\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{a}) + \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta) = 0$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{W}\hat{\mathbf{a}}).$$

Dengan menggandakan kedua ruas dengan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ didapat:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{W}\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{a}}). \quad (4.15)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.14) ke dalam persamaan (4.15) didapat:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{a}}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \mathbf{W}\left(S(K, \lambda) \mathbf{W}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})\right)\right) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})\right) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \mathbf{W}S(K, \lambda) (\mathbf{W}'\mathbf{y} - \mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta})\right) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{y} + \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}\right) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{y} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}. \end{aligned}$$

Dengan mengurangi kedua ruas dengan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta}$ didapat:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{y} \\ (\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X})\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{y}) \\ (\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X})\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}')\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Akibatnya estimator $\hat{\beta}(K, \mathbf{t}, \lambda)$ diberikan oleh:

$$\hat{\beta}(K, \mathbf{t}, \lambda) = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X}\right)^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}')\mathbf{y} \quad (4.16)$$

$$= B(K, \mathbf{t}, \lambda)\mathbf{y}, \quad (4.17)$$

dengan,

$$B(K, \mathbf{t}, \lambda) = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}'\mathbf{X}\right)^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{W}S(K, \lambda) \mathbf{W}').$$

Dengan cara yang serupa, dengan mensubstitusikan persamaan (4.16) ke dalam persamaan (4.14) didapat:

$$\hat{\mathbf{a}} = S(K, \lambda) \mathbf{W}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})$$

$$= S(K, \lambda) \mathbf{W}' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}') \mathbf{y} \right)$$

Jadi, estimator $\hat{\mathbf{a}}(K, \lambda)$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}(K, \lambda) &= S(K, \lambda) \mathbf{W}' \left(\mathbf{I} - \mathbf{X} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}') \right) \mathbf{y} \\ &= \left(S \mathbf{W}' \mathbf{I} - S \mathbf{W}' \mathbf{X} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} S \mathbf{W}' \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S \mathbf{W}') \right) \mathbf{y} \\ &= A(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

dengan,

$$A(K, \mathbf{t}, \lambda) = \left(S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{I} - S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{X} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}') \right).$$

Selanjutnya, estimator fungsi regresi dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{W} \hat{\mathbf{a}}(K, \mathbf{t}, \lambda) + \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}(K, \mathbf{t}, \lambda) \\ &= \mathbf{W} A(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y} + \mathbf{X} B(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{W} A(K, \mathbf{t}, \lambda) + \mathbf{X} B(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y} \\ &= C(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

dengan $C(K, \mathbf{t}, \lambda) = \mathbf{W} A(K, \mathbf{t}, \lambda) + \mathbf{X} B(K, \mathbf{t}, \lambda)$

Akibatnya estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* diberikan oleh:

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \hat{f}_1(x_1) + \sum_{j=2}^p \hat{f}_j(x_j), j=2, 3, \dots, p \text{ dengan}$$

$$\hat{f}_1(x_1) = \hat{b}x_1 + \frac{1}{2}\hat{a}_0 + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k \cos kx_1, \text{ dan}$$

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{v=1}^m \hat{\beta}_{vj} x_j^v + \sum_{u=1}^r \hat{\alpha}_{uj} (x_j - t_{uj})_+^m, j = 2, 3, \dots, p.$$

Estimator untuk parameter $\hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_k, k = 1, 2, \dots, K, \hat{\beta}_{vj}, v = 1, 2, \dots, m$

dan $\hat{\alpha}_{uj}, u = 1, 2, \dots, r, j = 2, 3, \dots, p$ diperoleh dari persamaan:

$$\hat{\mathbf{a}}(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_K)' = A(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}, \text{ dimana}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\hat{\beta}_{11}, \dots, \hat{\beta}_{m2}, \hat{\alpha}_{12}, \dots, \hat{\alpha}_{r2}, \vdots \dots \vdots \hat{\beta}_{1p}, \dots, \hat{\beta}_{mp}, \hat{\alpha}_{1p}, \dots, \hat{\alpha}_{rp})' = B(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}$$

dan

$$A(K, \mathbf{t}, \lambda) = \left(S(K, \lambda) \mathbf{W} \mathbf{I} - S(K, \lambda) \mathbf{W} \mathbf{X} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}') \right).$$

dimana

$$B(K, \mathbf{t}, \lambda) = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}' S(K, \lambda) \mathbf{W}' \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}'). \quad \blacksquare$$

4.3 Pemilihan Parameter Penghalus dan Titik-titik Knot Optimal

Bilodeau (1992) memperlihatkan dalam regresi nonparametrik deret Fourier, bahwa apabila nilai parameter penghalus λ sangat kecil, maka akan memberikan estimator deret Fourier yang sangat kasar. Sebaliknya untuk nilai parameter penghalus λ yang sangat besar akan menghasilkan estimator deret Fourier yang mulus (*smooth*). Oleh karena itu, dalam regresi nonparametrik parameter penghalus λ yang paling optimal harus dipilih agar diperoleh estimator deret Fourier yang paling sesuai untuk data.

Metode untuk memilih parameter penghalus optimal dalam regresi nonparametric telah dikembangkan seperti Craven dan Wahba (1979) menggunakan metode *Cross Validation* (CV). Wang (1998) memberikan metode Unbiased Risk (UBR) dan Wahba (1990) memberikan suatu metode *Generalized Cross Validation* (GCV). Selanjutnya diberikan suatu metode untuk memilih parameter penghalus λ optimal dan titik knot optimal pada estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametric multivariabel.

Estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametric dapat disajikan menjadi:

$$\hat{\mu}_\lambda(x) = C(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y} \quad (4.20)$$

Nilai λ dan titik knot optimal diperoleh dengan meminimumkan GCV. Untuk tujuan memilih titik knot dan parameter penghalus optimal dalam estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, diperlukan beberapa lemma sebagai berikut:

Lemma 4.3.1

Jika estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* diberikan oleh Persamaan (4.20), maka *mean square error* dari estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* diberikan oleh:

$$U(K, \mathbf{t}, \lambda) = n^{-1} \mathbf{y}' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y}$$

Bukti:

Jika $\hat{\mu}_\lambda(x)$ estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, maka *mean square error* dari model ini diberikan oleh:

$$U(K, \mathbf{t}, \lambda) = n^{-1} (\mathbf{y} - \hat{\mu}_\lambda(x, K, \mathbf{t}, \lambda))' (\mathbf{y} - \hat{\mu}_\lambda(x, K, \mathbf{t}, \lambda))$$

Berdasarkan persamaan (4.3.1) didapat:

$$\begin{aligned} U(K, \mathbf{t}, \lambda) &= n^{-1} (\mathbf{y} - C(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y})' (\mathbf{y} - C(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}) \\ &= n^{-1} ((\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y})' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y} \\ &= n^{-1} \mathbf{y}' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y} \quad \blacksquare \quad (4.21) \end{aligned}$$

Lemma 4.3.2

Jika diberikan Statistik $U(K, \mathbf{t}, \lambda)$ seperti pada Lemma 4.3.1, maka fungsi *Generalized Cross Validation* diberikan oleh:

$$V(K, \mathbf{t}, \lambda) = \frac{n^{-1} \mathbf{y}' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y}}{\left[n^{-1} \text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \right]^2}$$

Bukti:

Fungsi *Generalized Cross Validation* dapat ditulis menjadi:

$$V(K, \mathbf{t}, \lambda) = \frac{U(K, \mathbf{t}, \lambda)}{\left[n^{-1} \text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \right]^2}.$$

Berdasarkan Lemma (4.3.1) didapat:

$$\begin{aligned}
V(K, \mathbf{t}, \lambda) &= \frac{n^{-1}(\mathbf{y} - \hat{\mu}_\lambda(x))'(\mathbf{y} - \hat{\mu}_\lambda(x))}{\left[n^{-1}\text{trace}(\mathbf{I} - \hat{\mu}_\lambda(x))\right]^2} \\
&= \frac{n^{-1}[(\mathbf{y} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\mathbf{y}]'[(\mathbf{y} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\mathbf{y}]}{\left[n^{-1}\text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\right]^2} \\
&= \frac{n^{-1}[(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\mathbf{y}]'[(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\mathbf{y}]}{\left[n^{-1}\text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\right]^2} \\
&= \frac{n^{-1}\mathbf{y}'(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))'(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\mathbf{y}}{\left[n^{-1}\text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\right]^2} \quad \blacksquare \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Parameter penghalus λ dan titik knot optimal diperoleh dari meminimumkan fungsi $V(K, \mathbf{t}, \lambda)$, yaitu:

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{t}_{\text{optimal}}, \lambda_{\text{optimal}}) &= \underset{\{\mathbf{t}, 0 < \lambda < \infty\}}{\text{Min}} \{V(\mathbf{t}, \lambda)\} \\
&= \underset{\{\mathbf{t}, 0 < \lambda < \infty\}}{\text{Min}} \left\{ \frac{n^{-1}\mathbf{y}'(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))'(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\mathbf{y}}{\left[n^{-1}\text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))\right]^2} \right\} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

BAB 5

EVALUASI PENAKSIR PARAMETER MODEL SIMULASI

Bab ini menjelaskan hasil-hasil empiris melalui studi simulasi untuk menjawab tujuan kedua dari penelitian. Simulasi dilakukan dengan menggunakan data yang dibangkitkan dari fungsi deret Fourier dengan berbagai osilasi K (yaitu 1, 2, dan 3), dan fungsi polinomial spline *truncated* linear dengan variasi titik knot r sebanyak tiga (yaitu 1, 2, dan 3 titik knot). Pada bagian pertama simulasi, ditampilkan gambaran tentang kemampuan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* linear dalam regresi nonparametrik multivariabel *aditif*. Ada 4 (empat) variasi kondisi atau perlakuan yang akan dievaluasi dampaknya terhadap ukuran sampel, varians, osilasi K dan banyaknya titik knot r adalah sebagai berikut.

1. Ukuran sampel $n = 50, 100$ dan 200 .
2. Ukuran varians $\sigma^2 = 0,1; 0,5$ dan 1 .
3. Fungsi deret Fourier dengan osilasi $K=1, 2$ dan 3 .
4. Fungsi polinomial spline *truncated* linear dengan banyaknya titik knot yaitu $r = 1, 2$ dan 3 titik knot.

Pengambilan ukuran sampel n dilakukan untuk memperlihatkan apakah semakin besar sampel yang diambil estimasi model yang dihasilkan akan semakin baik. Berdasarkan pengambilan ukuran sampel $n=50, 100$ dan 200 dipandang cukup untuk mewakili ukuran sampel besar. Demikian juga ukuran varians untuk mengetahui apakah dengan semakin kecil varians yang diambil estimasi model yang dihasilkan akan semakin baik. Pengambilan ukuran varians $\sigma^2 = 0,1; 0,5$ dan 1 , dipandang cukup untuk mewakili ukuran varians kecil dan besar oleh karena data simulasi yang dibangkitkan dari $U(0,1)$. Besarnya osilasi K yang terjadi pada fungsi deret Fourier untuk mengetahui apakah semakin banyak osilasi K yang terjadi dalam estimasi model akan semakin baik. Osilasi $K=1, 2$ dan 3 dipandang cukup untuk

mewakili banyaknya osilasi yang terjadi pada fungsi deret Fourier dalam mengestimasi model. Sedangkan banyaknya titik knot r dalam fungsi spline *truncated* dilakukan untuk mengetahui apakah semakin banyak titik knot diambil model akan semakin baik. Penentuan titik knot $r=1,2$ dan 3 dipandang cukup baik untuk mendapatkan estimasi model dalam simulasi.

Selanjutnya untuk memudahkan implementasi simulasi, pada bagian berikut akan disajikan desain model simulasi pada ukuran sampel $n=100$ dan $\sigma^2 = 0,1$. Sedangkan untuk desain model simulasi yang lain yaitu $n = 50, \sigma^2 = 0,1; \sigma^2 = 0,5$ dan $\sigma^2 = 1$, $n = 100, \sigma^2 = 0,5, \sigma^2 = 1$ atau $n = 200, \sigma^2 = 0,1; \sigma^2 = 0,5$ dan $\sigma^2 = 1$ disajikan pada Lampiran 1. Secara umum ada 9 model simulasi dirancang dengan berbagai kombinasi variasi fungsi percobaan, yaitu bentuk dari fungsi deret Fourier dengan berbagai osilasi K dan fungsi spline *truncated* linear dengan berbagai titik knot r . Model M_{Kr} adalah model simulasi dengan besarnya osilasi pada deret Fourier sebesar K (dengan $K = 1,2,3$) dan banyaknya knot pada spline *truncated* linear sebanyak r (dengan $r = 1,2,3$). Pada studi simulasi ini fungsi deret Fourier dibangkitkan dari distribusi $x_{1i} \sim U(1,n)$, karena nilai dari x digunakan untuk kelipatan yang akan dikalikan dengan ϕ dalam fungsi Fourier. Fungsi spline *truncated* dibangkitkan dari distribusi $x_{2i} \sim U(0,1)$, karena nilai x dari distribusi uniform menghasilkan distribusi yang setiap titiknya memiliki kemungkinan muncul yang sama. Jadi ketika membangkitkan distribusi tersebut diharapkan data bangkitan itu merupakan data yang setiap bagiannya terwakili. Misalkan distribusi $U(0,1)$, maka akan muncul data kontiniu diantara 0 sampai dengan 1 semuanya terwakili. Ketika semua bagian data terwakili maka pada plot fungsi tersebut dapat terlihat dengan jelas. Berikut menyajikan bentuk dari fungsi deret Fourier dengan berbagai osilasi K dan fungsi spline *truncated* linear dengan berbagai titik knot r pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Fungsi Deret Fourier $f_{1K}(x_1)$ dan Fungsi Spline *Truncated* $f_{2r}(x_2)$

K	$f_{1K}(x_{1i})$	r	$f_{2r}(x_{2i})$
1	$f_1(x_{1i}) = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right)$	1	$f_2(x_{2i}) = \beta x_{2i} + \alpha_1(x_{2i} - t_1)'_+$
2	$f_1(x_{1i}) = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) +$ $a_2 \cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{n}\right)$	2	$f_2(x_{2i}) = \beta x_{2i} + \alpha_1(x_{2i} - t_1)'_+ +$ $\alpha_2(x_{2i} - t_2)'_+$
3	$f_1(x_{1i}) = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) +$ $a_2 \cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{n}\right) + a_3 \cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{n}\right)$	3	$f_2(x_{2i}) = \beta x_{2i} + \alpha_1(x_{2i} - t_1)'_+ +$ $\alpha_2(x_{2i} - t_2)'_+ +$ $\alpha_3(x_{2i} - t_3)'_+$

Studi simulasi ini dibangkitkan x_{1i} , x_{2i} dari distribusi $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$. Fungsi deret Fourier dibangkitkan dari distribusi uniform diskrit $(1, n)$ karena nilai dari x digunakan untuk kelipatan yang akan dikalikan dengan phi atau $\cos(x \cdot \text{phi})$ dibagi n). Fungsi spline *truncated* dibangkitkan dari distribusi uniform $(0, 1)$, karena distribusi uniform diharapkan menghasilkan distribusi yang setiap titik-titik memiliki kemungkinan muncul yang sama dan semuanya bisa terwakili. Berikut disajikan variasi-variasi parameter untuk fungsi deret Fourier dengan berbagai osilasi K dan fungsi spline *truncated* linear dengan berbagai titik-titik knot r pada Tabel 5.2 dan Tabel 5.3.

Tabel 5.2 Parameter Fungsi Deret Fourier $f_{1K}(x_{li})$

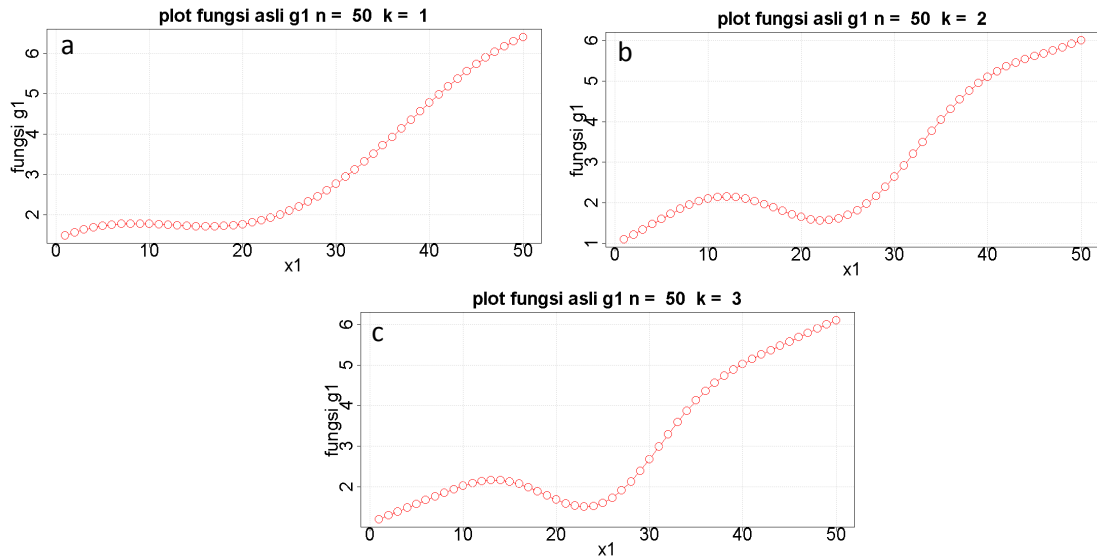
K	b	$\frac{1}{2}a_0$	a_1	a_2	a_3
1	0,1	1	0,9	*	*
2	0,1	1	0,9	-0,4	*
3	0,1	1	0,9	-0,4	0,1

Tabel 5.3 menyajikan variasi-variasi parameter untuk fungsi spline *truncated* linear dengan berbagai titik knot. Tanda bintang (“”) pada Tabel 5.2 dan 5.3 menunjukan nilai parameter pada fungsi deret Fourier dan fungsi *truncated* tidak ada.

Tabel 5.3 Parameter Fungsi Spline *Truncated* $f_{2r}(x_{2i})$

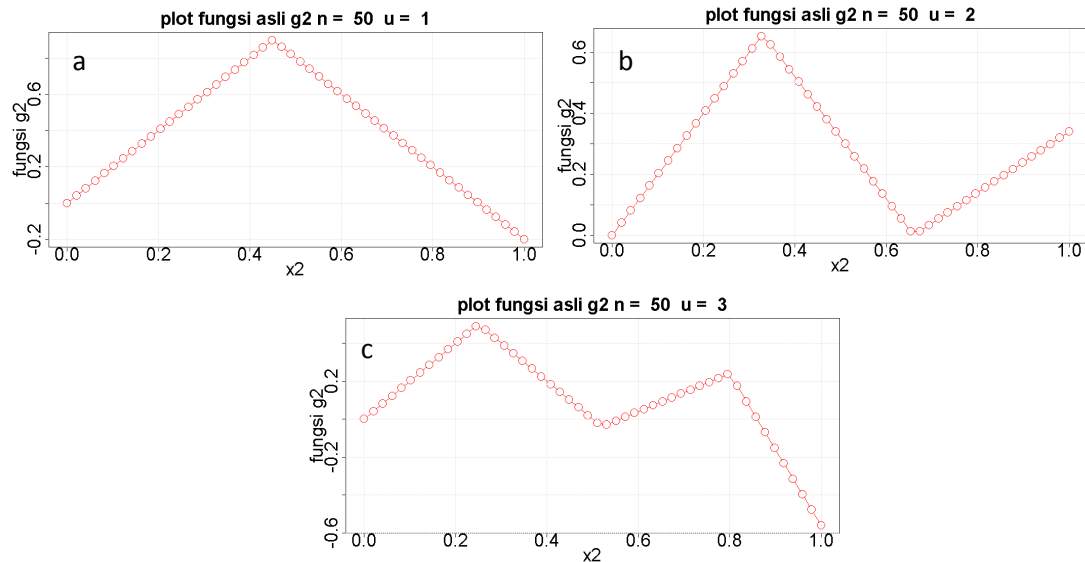
r	β	α_1	α_2	α_3	t_1	t_2	t_3
1	2	-4	*	*	0,45	*	*
2	2	-4	3	*	0,33	0,66	*
3	2	-4	3	-5	0,25	0,52	0,80

Gambar 5.1 menyajikan bentuk visual dari fungsi deret Fourier dengan berbagai osilasi K . Gambar 5.1(a) menyajikan fungsi deret Fourier dengan osilasi $K=1$. Gambar 5.1(b) dan Gambar 5.1(c) masing-masing menyatakan fungsi deret Fourier dengan variasi $K=2$ dan $K=3$. Untuk besarnya sampel $n=50$.



Gambar 5.1 Fungsi Deret Fourier $K=1$ (a), $K=2$ (b), dan $K=3$ (c).

Gambar 5.2 menyajikan bentuk visual dari fungsi spline *truncated* linear dengan berbagai titik knot. Gambar 5.2(a) menyajikan fungsi spline *truncated* linear dengan satu titik knot. Sedangkan Gambar 5.2(b) dan Gambar 5.2(c) masing-masing menyatakan fungsi spline *truncated* linear dengan dua titik knot dan tiga titik knot.



Gambar 5.2 Fungsi Spline *Truncated* Satu Titik Knot (a), Dua Titik Knot (b), dan Tiga Titik Knot (c).

Pada setiap model simulasi, dilakukan pengulangan sebanyak 10 kali dengan mencobakan kombinasi K (yaitu $K=1, 2, 3$) dan r (yaitu $r=1, 2, 3$). Sehingga untuk setiap pengulangan pada setiap model simulasi dilakukan estimasi fungsi sebanyak 9 macam sebagai hasil kombinasi dari K dan r tersebut. Selanjutnya hasil kajian simulasi dapat diuraikan dalam subbab-subbab dibawah ini.

5.1 Model Fungsi M_{11}

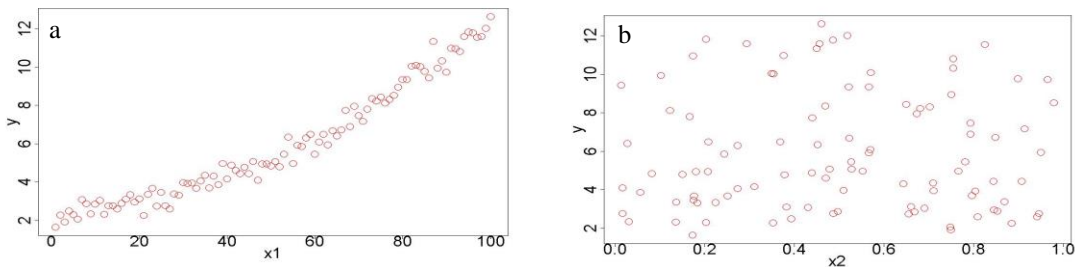
Berdasarkan Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{11} merupakan fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=1$ dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* linear dengan satu titik knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

$$= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,45)_+ + \varepsilon_i.$$

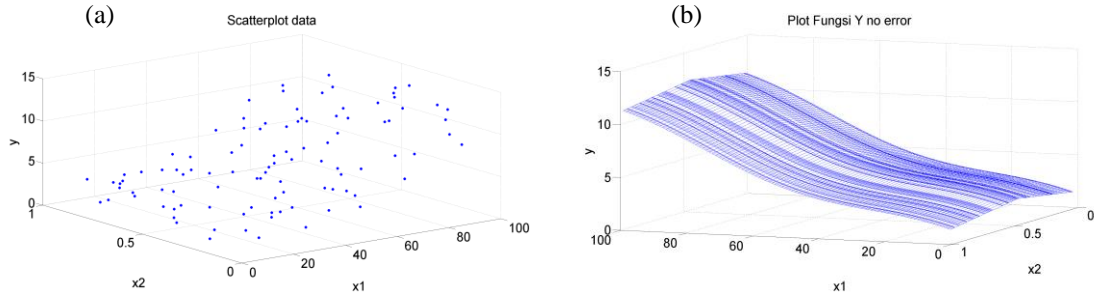
Selanjutnya dari persamaan (5.1) dibangkitkan : $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0,1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Sehingga didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$.

Plot antara respon y_i dengan prediktor x_{1i} dan y_i dengan prediktor x_{2i} disajikan dalam Gambar 5.3.



Gambar 5.3 Plot antara y dengan x_1 (a), dan y dengan x_2 (b).

Plot tiga dimensi dari (x_{1i}, x_{2i}, y_i) disajikan dalam Gambar 5.4



Gambar 5.4 *Scatterplot* y dengan x_1 dan x_2 (a), dan Kurva Regresi y (b).

Berdasarkan Gambar 5.3 dan Gambar 5.4 dapat dideskripsikan bahwa pola hubungan antara y_i dengan x_{1i} cenderung berubah ubah pada sub sub interval tertentu. Sedangkan hubungan antara y_i dengan x_{2i} tidak mengikuti suatu pola tertentu. Sehingga dicoba model gabungan deret Fourier dan spline *truncated*. Model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

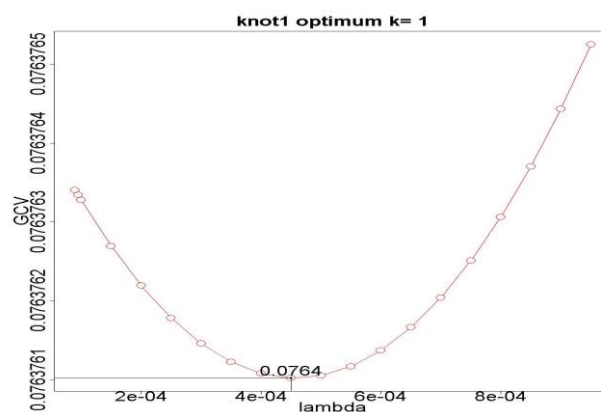
$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^3 a_k \cos k \left(\frac{2\pi x_{1i}}{n} \right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^3 \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.2)$$

Selanjutnya hasil-hasil studi simulasi pada model M_{11} yang terdiri dari output program R disajikan secara lengkap pada Lampiran 1. Tabel 5.4 menyajikan nilai GCV minimum, parameter penghalus λ optimal, R^2 dan MSE .

Tabel 5.4 Nilai GCV , Parameter Penghalus λ optimal, R^2 dan MSE Fungsi M_{11}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot : r	GCV	λ_{Optimal}	R^2	MSE
1	1	1	0,115	0,0007	98,79	0,109
2	1	1	0,110	0,0007	98,82	0,105
3	1	1	0,112	0,0007	98,77	0,106
4	1	1	0,113	0,0008	98,76	0,107
5	1	1	0,095	0,0006	99,04	0,091
6	1	1	0,089	0,0006	99,04	0,084
7	1	1	0,076	0,0005	99,21	0,073
8	1	1	0,090	0,0005	98,97	0,094
9	1	1	0,106	0,0005	98,86	0,100
10	1	1	0,098	0,0005	99,01	0,093

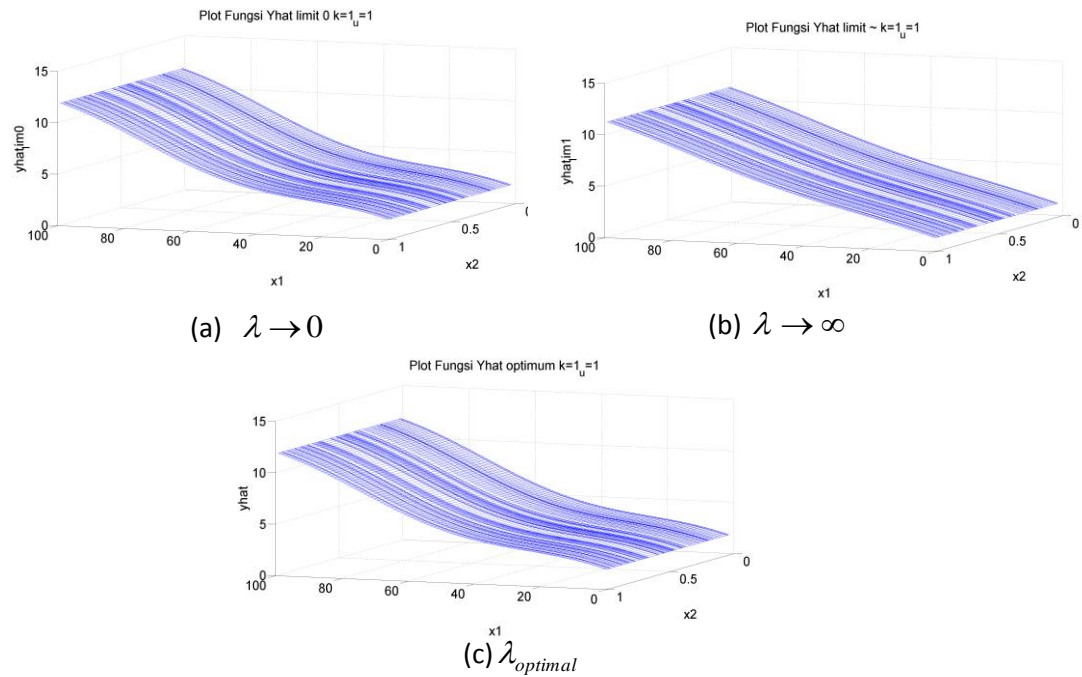
Bertitik tolak dari hasil simulasi pada Tabel 5.4, terlihat bahwa nilai GCV minimum adalah 0,076 dengan nilai $R^2 = 99,21$ terjadi pada ulangan ke 7. Model regresi nonparametrik deret Fourier dan spline *truncated* yang terbaik diperoleh dari nilai K optimal dan titik knot yang optimal, menggunakan GCV paling kecil. Plot $GCV(\lambda)$ pada $K=1$ dan $r=1$ ulangan 7 disajikan dalam Gambar 5.5.



Gambar 5.5 Plot $GCV(\lambda)$ dari Model Fungsi M_{11}

Mengacu pada Gambar 5.5 dan Tabel 5.4 terlihat bahwa nilai $GCV(\lambda)$ minimum adalah 0,076 dan nilai λ optimal adalah 0,00045, dengan $K=1$ dan banyaknya knot satu knot serta lokasi titik knot adalah 0,43.

Estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat tergantung pada nilai parameter penghalus λ . Gambar 5.6 (a) menyajikan estimasi kurva regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dengan nilai $\lambda \rightarrow 0$ (kecil). Gambar 5.6 (b) menyajikan estimasi kurva regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dengan nilai $\lambda \rightarrow \infty$ (besar). Gambar 5.6 (c) menyajikan estimasi kurva regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dengan λ optimal.



Gambar 5.6 Plot model regresi M_{11} berdasarkan λ optimal dan GCV minimum.

Bertitik tolak dari Gambar 5.6 (a) dapat dideskripsikan secara visual bahwa pendekatan model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dengan λ mendekati nol memberikan estimasi yang cenderung kasar (lokal). Gambar 5.6 (b) dengan nilai $\lambda \rightarrow \infty$ (besar) memberikan estimasi yang cenderung halus (global).

Demikian juga λ optimal merupakan pendekatan yang terbaik terlihat dari Gambar 5.6 (c). Selanjutnya disajikan estimasi parameter dan titik knot optimal dari model fungsi M_{11} dengan variasi ukuran sampel $n = 50$, $n = 100$ dan $n = 200$, ukuran varians $\sigma^2 = 0,1$. Tabel 5.5 menyajikan estimasi parameter dan titik knot optimal dari model fungsi M_{11} dengan $n = 50$ dan $\sigma^2 = 0,1$.

Tabel 5.5 Estimasi Parameter dan Knot Model Persamaan Fungsi M_{11} , $n = 50$.

Ulangan	Estimasi Parameter dan Lokasi Knot					
	b	a_0	a_1	β_1	α_1	t_1
	0,1	1	0,9	2	- 4	0,45
1	0,09	1,20	0,88	1,79	- 2,09	0,47
2	0,09	1,04	0,83	2,25	- 4,88	0,46
3	0,09	1,39	0,92	1,49	- 3,48	0,47
4	0,10	0,90	1,05	2,93	- 1,04	0,47
5	0,10	0,87	0,89	2,71	- 3,89	0,42
6	0,10	1,23	0,95	1,54	- 3,46	0,47
7	0,10	1,08	0,78	1,41	- 3,44	0,46
8	0,10	1,21	0,95	2,70	- 1,10	0,47
9	0,09	1,30	0,96	1,65	- 3,53	0,44
10	0,09	1,19	0,95	1,82	- 4,47	0,47

Bertitik tolak dari hasil simulasi dalam Tabel 5.5, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel pada ulangan ke 10. Tabel 5.6 disajikan estimasi parameter dan titik knot optimal dari model fungsi percobaan M_{11} dengan $n = 100$ dan $\sigma^2 = 0,1$ terjadi pada ulangan ke 7.

Tabel 5.6 Estimasi Parameter dan Knot Model Persamaan Fungsi M_{11} . $n = 100$.

Ulangan	Estimasi Parameter dan Lokasi Knot					
	b	a_0	a_1	β_1	α_1	t_1
	0,1	1	0,9	2	- 4	0,45
1	0,10	0,82	0,85	2,36	- 5,06	0,47
2	0,09	0,86	0,89	2,15	- 4,23	0,45
3	0,09	0,64	0,97	3,33	- 4,15	0,46
4	0,10	0,89	0,84	2,83	- 2,05	0,47
5	0,10	0,89	0,88	2,21	- 4,39	0,44
6	0,10	1,07	0,90	1,78	- 3,77	0,44
7	0,10	0,77	0,91	2,35	- 4,33	0,45
8	0,09	0,89	0,87	2,84	- 1,96	0,42
9	0,09	1,32	0,32	1,32	- 2,86	0,44
10	0,10	0,89	0,81	2,23	- 4,62	0,47

Berdasarkan hasil simulasi dalam Tabel 5.6, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel pada ulangan ke 7.

$$\hat{y}_i = 0,1x_{1i} + 0,77 + 0,91\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) + 2,35x_{2i} - 4,33(x_{2i} - 0,45)_+ \quad (5.3)$$

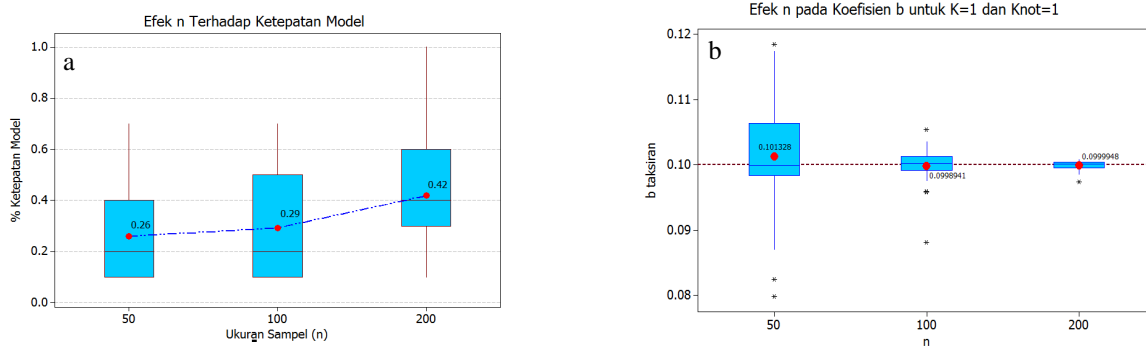
Terlihat dari Tabel 5.6 diketahui bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model yang ditentukan atau model yang disimulasikan. Model ini mempunyai nilai $R^2 = 99,21168$ dan $MSE = 0,072528$. Berikutnya Tabel 5.7 disajikan estimasi parameter dan titik knot optimal dari model fungsi percobaan M_{11} dengan $n = 200$ dan $\sigma^2 = 0,1$ terjadi pada ulangan ke 6.

Tabel 5.7 Estimasi Parameter dan Knot Model Persamaan Fungsi M_{11} , $n = 200$.

Ulangan	Estimasi Parameter dan Lokasi Knot					
	b	a_0	a_1	β_1	α_1	t_1
	0,1	1	0,9	2	- 4	0,45
1	0,10	0,99	0,87	2,06	- 4,09	0,44
2	0,10	0,90	0,85	1,97	- 4,00	0,45
3	0,10	0,99	0,91	1,89	- 3,76	0,43
4	0,10	0,98	0,90	2,06	- 3,91	0,42
5	0,09	0,76	0,91	2,45	- 4,35	0,42
6	0,10	0,94	0,88	1,87	- 3,70	0,45
7	0,09	0,98	0,88	2,13	- 4,23	0,45
8	0,10	0,98	0,88	2,60	- 2,26	0,42
9	0,10	1,04	0,88	1,82	- 3,92	0,48
10	0,09	1,03	0,91	2,27	- 1,07	0,42

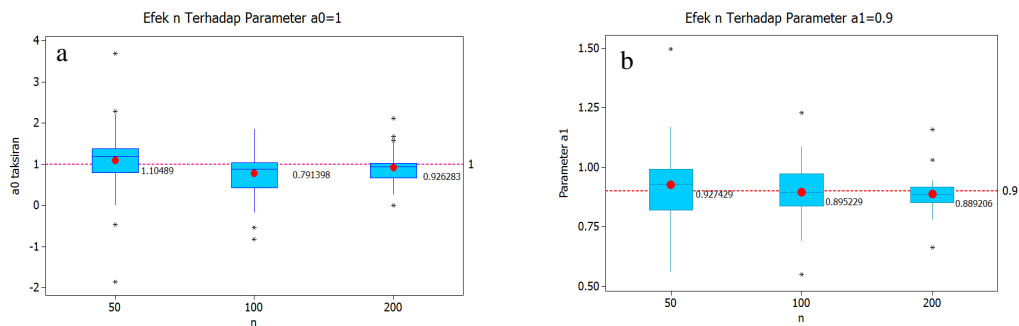
Berpedoman pada hasil simulasi dalam Tabel 5.7, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel pada ulangan ke 6.

Model simulasi M_{11} merupakan model gabungan deret Fourier dengan $K=1$ dan fungsi polinomial spline *truncated* linear dengan satu titik knot, $n = 100$ dan $\sigma^2 = 0,1$; dengan cara serupa disajikan dalam bentuk *boxplot*. Data simulasi dibangkitkan dengan variasi ukuran sampel $n = 50$, $n = 100$ dan $n = 200$, variasi ukuran varians $\sigma^2 = 0,1$; $\sigma^2 = 0,5$ dan $\sigma^2 = 1$, variasi $K=1$, $K=2$ dan $K=3$ dan variasi ukuran titik knot yaitu satu titik knot, dua titik knot dan tiga titik knot. Disajikan dalam Gambar 5.7 pada Lampiran 2. Gambar 5.7 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* M_{11} untuk ketepatan model ukuran sampel n dan estimasi parameter b .



Gambar 5.7 Ketepatan Model untuk ukuran sampel n (a), dan Estimasi b (b).

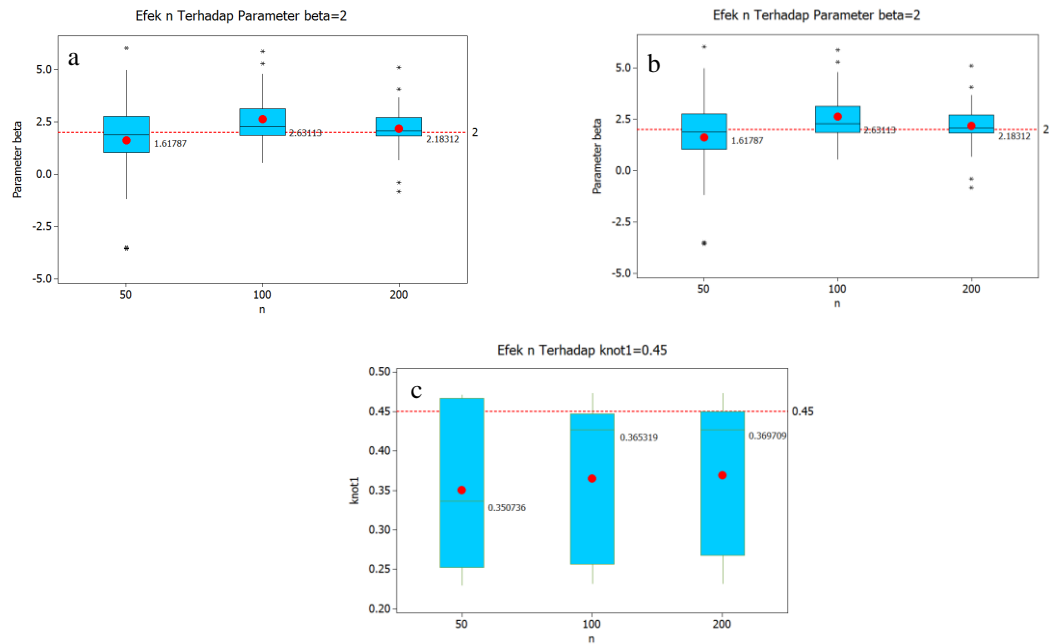
Berdasarkan Gambar 5.7 (a), diketahui bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka diperoleh hasil ketepatan model semakin baik atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.7(b) terlihat bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka diperoleh hasil rata rata estimasi parameter b cenderung semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Selanjutnya pada Gambar 5.8(a) dan (b), disajikan hasil studi simulasi model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* M_{11} untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 .



Gambar 5.8 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)

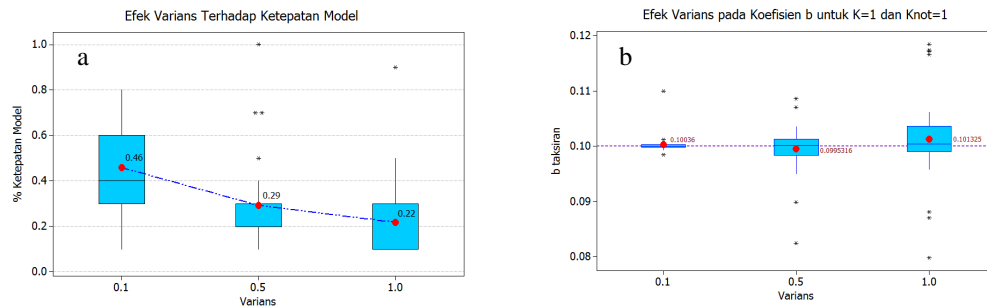
Mengacu pada Gambar 5.8 (a) dan (b), diperoleh fakta bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung rata- rata estimasi parameter a_0 dan a_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Selanjutnya Gambar 5.9 (a),(b) dan (c) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier

dan spline *truncated* M_{11} , untuk estimasi parameter β , α_1 dan nilai titik knot, sebagai berikut:



Gambar 5.9 Estimasi β (a), Estimasi titik knot t (b), dan Estimasi α_1 (c).

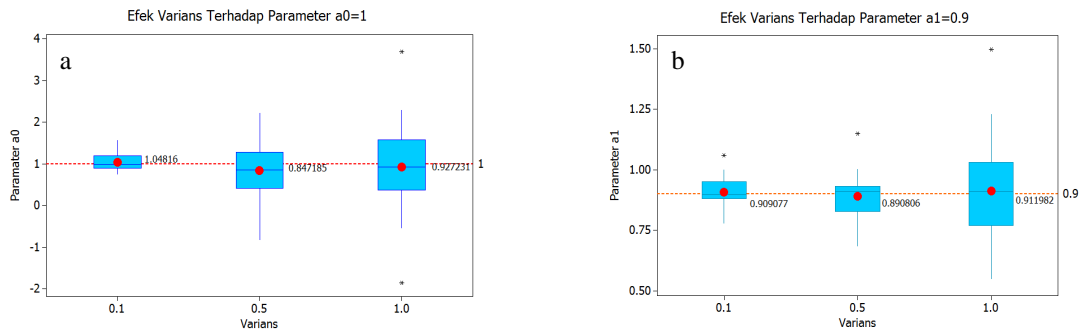
Gambar 5.9 (a) dan (b) diperoleh informasi data simulasi bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung rata-rata estimasi parameter β dan α_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Gambar 5.9(c) terlihat juga bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi nilai titik knot t semakin baik atau semakin mendekati nilai titik knot sesungguhnya. Berikutnya hasil penyajian simulasi variasi ukuran varians $\sigma^2 = 0,1$; $\sigma^2 = 0,5$ dan $\sigma^2 = 1$. Gambar 5.10 (a) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk kesesuaian varians σ^2 . Gambar 5.10 (b) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter b .



Gambar 5.10 Ketepatan Model untuk σ^2 (a), dan Estimasi b (b).

Berdasarkan pada Gambar 5.10 (a), diketahui bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka diperoleh hasil ketepatan model semakin baik atau semakin mendekati model sesungguhnya. Gambar 5.10 (b) juga terlihat bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung diperoleh hasil estimasi parameter b semakin baik atau sesuai dengan model aslinya.

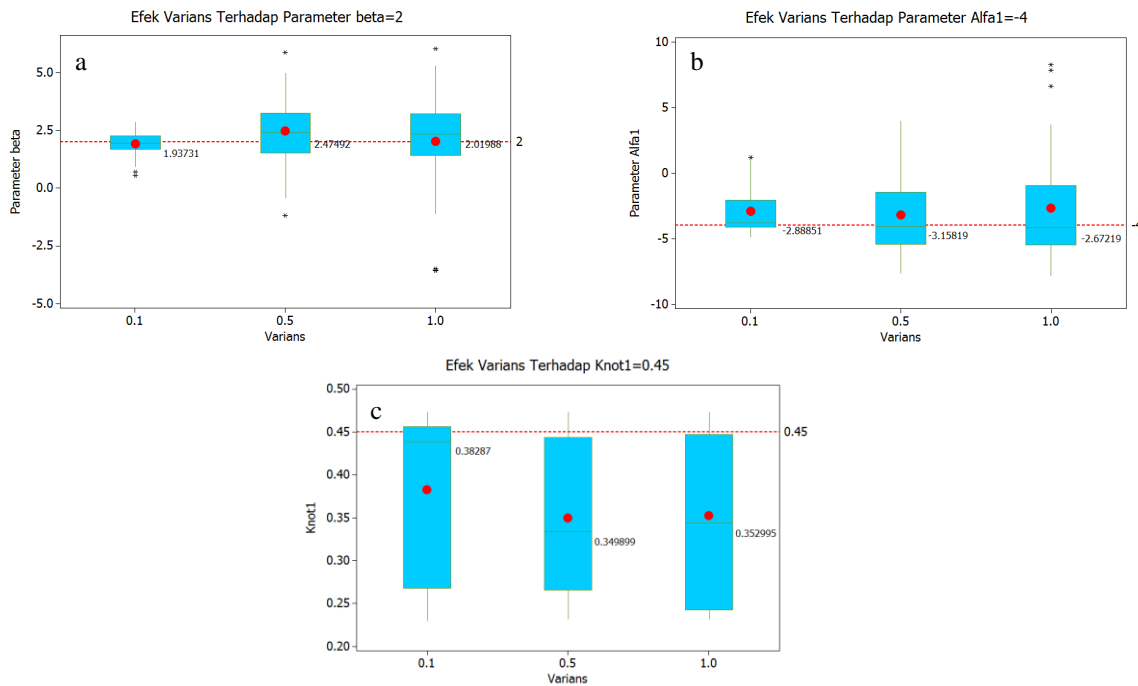
Gambar 5.11 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* untuk parameter a_0 dan a_1 .



Gambar 5.11 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).

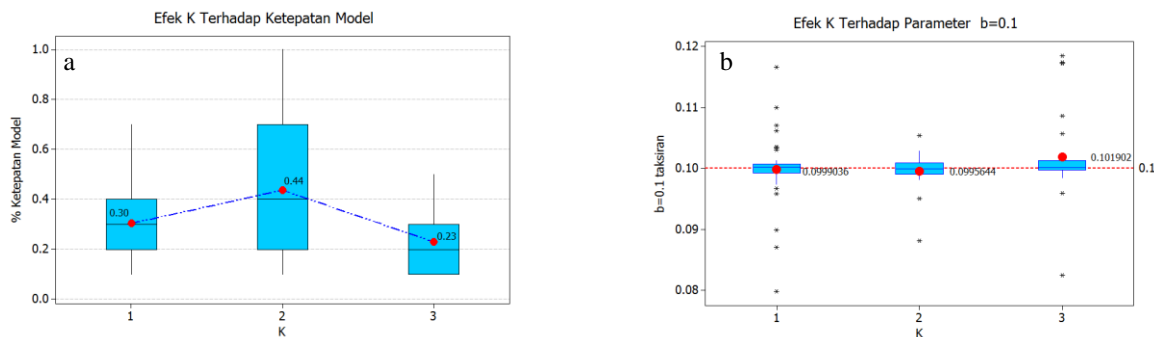
Bertitik tolak dari Gambar 5.11 (a) dan (b), diperoleh fakta bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung diperoleh hasil estimasi parameter a_0 dan a_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya.

Gambar 5.12 (a) dan (b) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret fourier dan spline *truncated* untuk estimasi parameter β dan α_1 . Gambar 5.12 (c) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* untuk estimasi nilai titik knot. Ditampilkan dalam Gambar 5.12.



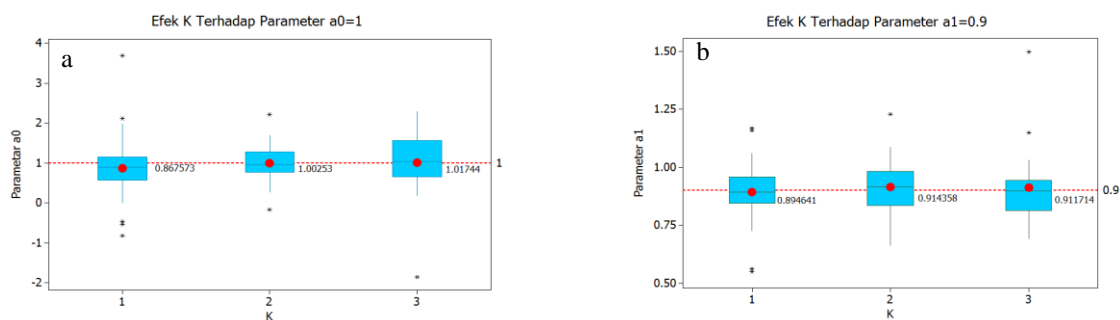
Gambar 5.12 Estimasi β (a), Estimasi α_1 (b), dan Estimasi Titik Knot t (c).

Mengacu pada Gambar 5.12 (a) dan (b), dapat ditunjukkan bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka ada kecenderungan diperoleh hasil rata-rata estimasi parameter β dan α_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Gambar 5.12 (c) terlihat bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka diperoleh hasil rata-rata estimasi nilai titik knot semakin baik atau semakin mendekati nilai titik knot sesungguhnya. Selanjutnya hasil simulasi variasi ukuran osilasi $K=1$, $K=2$ dan $K=3$, Gambar 5.13 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk ketepatan model variasi K dan estimasi parameter b .



Gambar 5.13 Ketepatan Model untuk K (a), dan Estimasi b (b).

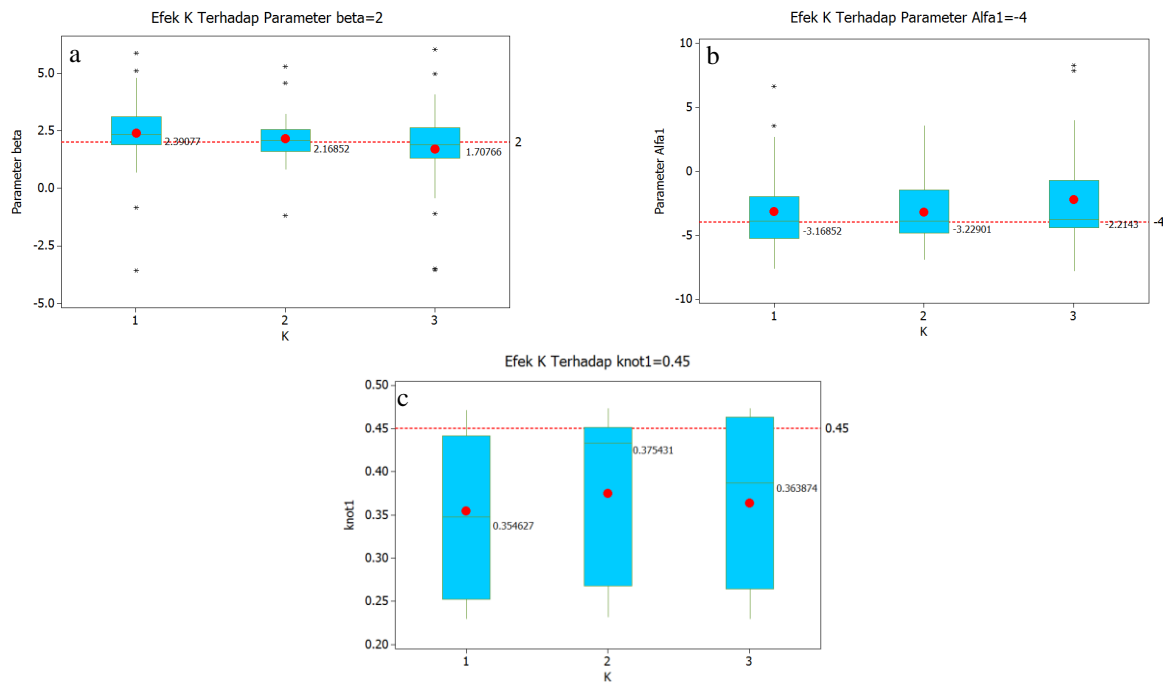
Berdasarkan Gambar 5.13 (a), dapat dinyatakan bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Oleh karena itu dalam estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* akan dilakukan pemilihan parameter K optimal. Gambar 5.13 (b) juga terlihat semakin besar ukuran K , ada kecenderungan hasil estimasi parameter b semakin baik atau sesuai dengan model sesungguhnya. Gambar 5.14 (a) dan (b) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 . Dapat dilihat dalam Gambar 5.14.



Gambar 5.14 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).

Berdasarkan Gambar 5.14 (a) dan (b) diperoleh fakta bahwa apabila semakin besar ukuran K , maka ada kecenderungan hasil estimasi parameter a_0 dan a_1

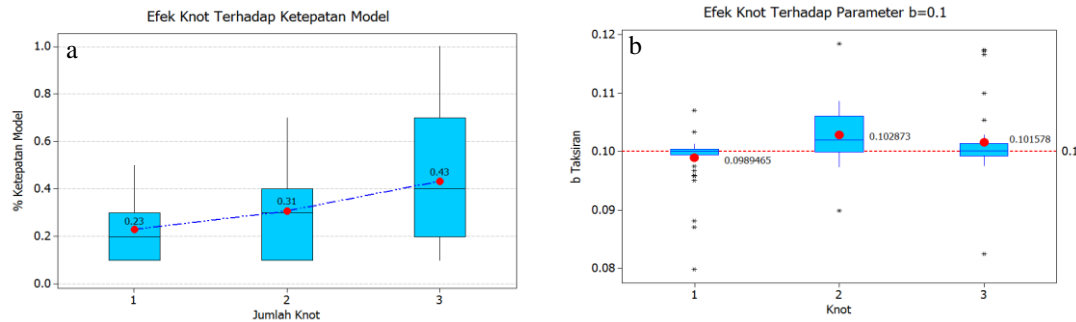
semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Gambar 5.15 (a) dan (b) ditampilkan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter β dan α_1 . Gambar 5.15 (c) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi nilai titik knot.



Gambar 5.15 Estimasi β (a), Estimasi α_1 (b), dan Estimasi Knot t (c).

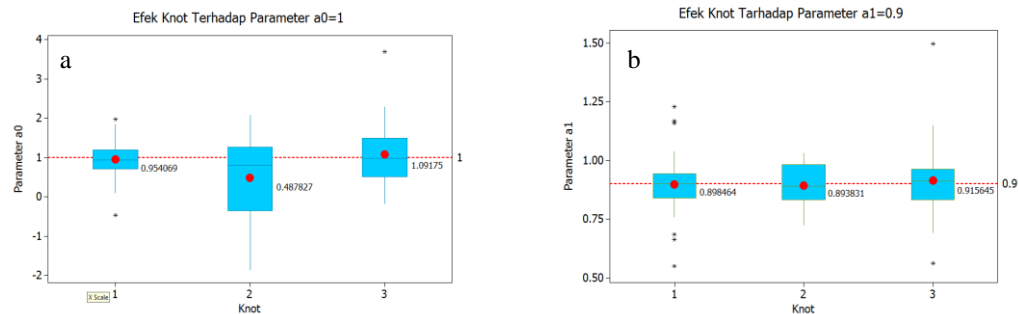
Gambar 5.15 (a) dan (b), dapat diketahui bahwa apabila semakin besar ukuran K , maka ada kecenderungan diperoleh hasil rata-rata estimasi parameter β dan α_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Gambar 5.15 (c) juga terlihat semakin besar ukuran K , ada kecenderungan diperoleh hasil rata - rata estimasi nilai titik knot semakin baik atau semakin mendekati nilai titik knot sesungguhnya. Selanjutnya hasil simulasi variasi ukuran titik knot yang terdiri dari satu knot, dua knot dan tiga knot. Gambar 5.16 (a) dan (b) menyajikan hasil studi

simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk ketepatan model ukuran titik knot dan estimasi parameter b .



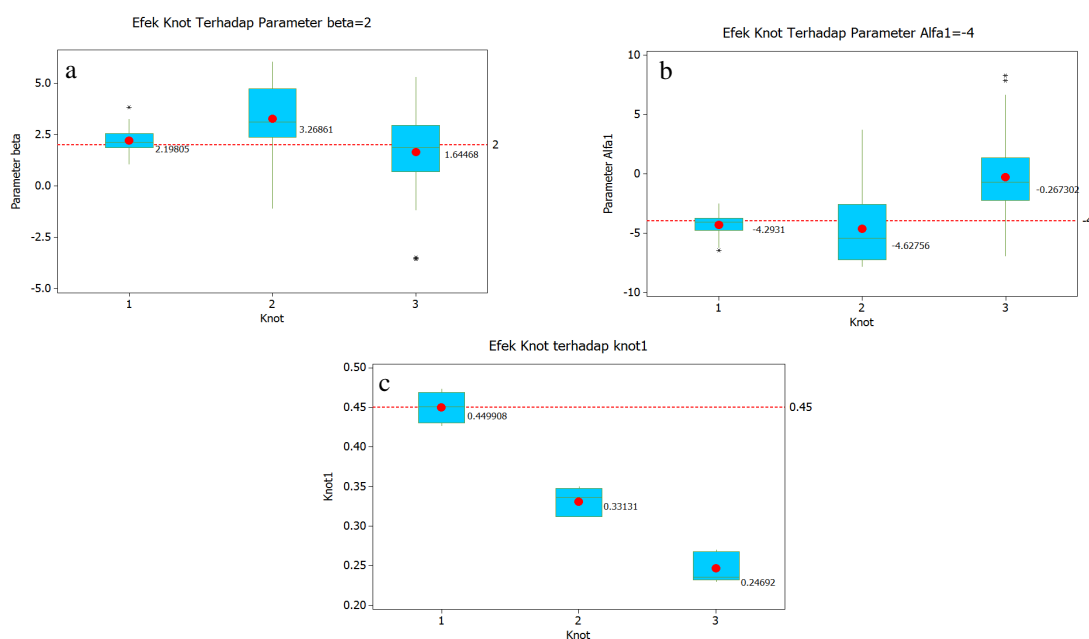
Gambar 5.16 Estimasi Ketepatan Model untuk Knot t (a), dan Estimasi b (b).

Mengacu pada Gambar 5.16 (a), dapat diinterpretasikan bahwa apabila semakin besar ukuran knot, maka cenderung diperoleh hasil ketepatan model semakin baik atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Walaupun demikian titik knot yang terlalu banyak juga akan menghasilkan model yang sangat kompleks, sehingga perlu dijadikan pertimbangan untuk pemilihan titik knot optimal untuk kumpulan data. Gambar 5.16(b) terlihat juga semakin besar ukuran knot, maka ada kecenderungan diperoleh hasil rata - rata estimasi parameter b semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Selanjutnya Gambar 5.17 (a) dan (b), dideskripsikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 .



Gambar 5.17 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)

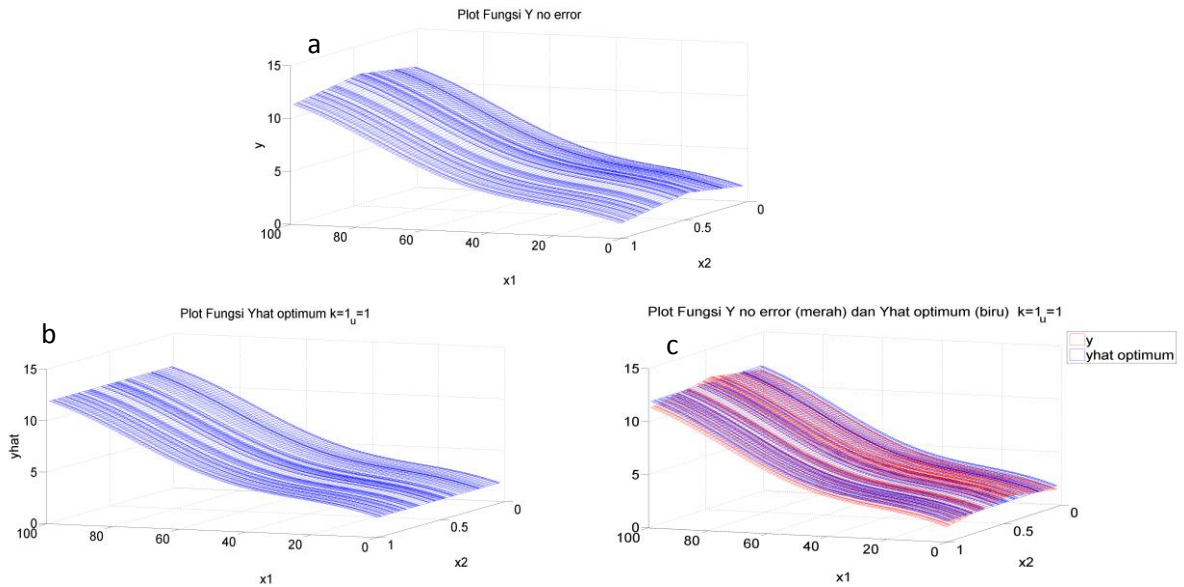
Bertitik tolak pada Gambar 5.17 (a) dan (b), diketahui bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka kecenderungan diperoleh hasil rata-rata estimasi parameter a_0 dan a_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai aslinya. Selanjutnya Gambar 5.18 (a) dan (b), menyajikan studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter β dan α_1 . Gambar 5.18 (c) ditampilkan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* untuk estimasi rata rata nilai titik knot.



Gambar 5.18 Estimasi β (a), Estimasi α_1 (b), dan Estimasi Knot t (c).

Dengan mengamati Gambar 5.18 (a) dan (b), dapat diperoleh fakta bahwa semakin besar ukuran knot kecenderungan diperoleh hasil rata-rata estimasi parameter β dan α_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai aslinya. Sedangkan dari Gambar 5.18 (c), dideskripsikan bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka ada kecenderungan diperoleh hasil rata-rata estimasi nilai titik knot semakin baik atau semakin mendekati nilai titik knot yang sesungguhnya.

Selanjutnya plot hasil estimator gabungan deret fourier dan spline *truncated* pada simulasi fungsi percobaan M_{11} diberikan pada Gambar 5.19(a) dan (b) plot model regresi f , dan model regresi \hat{f} . Gambar 5.19(c) disajikan model regresi f dengan \hat{f} .



Gambar 5.19 Plot Model Regresi f (a), Model Regresi \hat{f} (b), dan Model Regresi f dengan \hat{f} (c).

Berdasarkan Gambar 5.19 (b) dapat ditunjukkan bahwa antara f dan \hat{f} cenderung hampir sama (berimpit). Hal ini menunjukkan bahwa estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat baik untuk digunakan dalam memodelkan data ini.

5.2 Model Fungsi M_{12}

Berpedoman pada Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{12} merupakan fungsi gabungan antara $f_1(x_i)$: fungsi deret Fourier dengan $K=1$

dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* linear dua titik knot. Persamaan model regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

$$= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,33)_+ + 3(x_{2i} - 0,66)_+ + \varepsilon_i$$

Selanjutnya dari persamaan (5.4) dibangkitkan : $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini akan didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$.

Plot antara respon y_i dengan prediktor x_{1i} dan y_i dengan prediktor x_{2i} , disajikan pada Gambar 5.20 dan pada Lampiran 3. Nampak bahwa pola hubungan antara y_i dengan x_{1i} cenderung berubah - ubah pada sub sub interval tertentu. Hubungan antara y_i dengan x_{2i} tidak mengikuti suatu pola tertentu. Sehingga estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dapat digunakan untuk mengestimasi fungsi diatas. Jadi dicobalah model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i \quad (5.5)$$

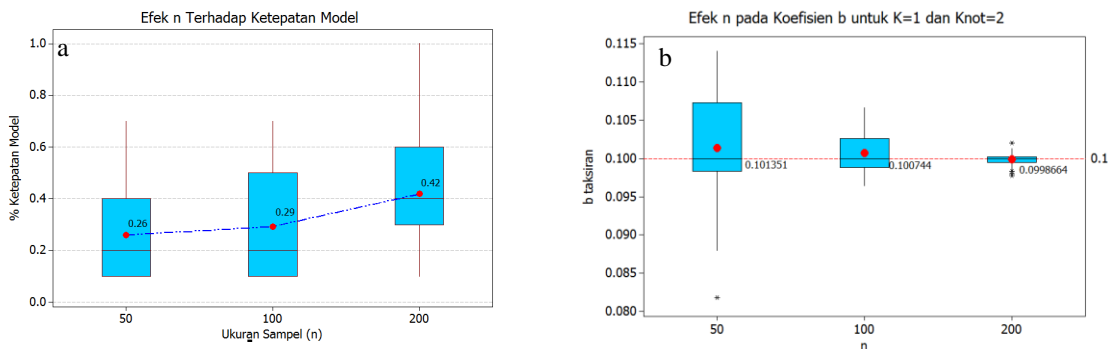
dengan $K = 1, 2, 3$ dan $r = 1, 2, 3$.

Berikutnya hasil data simulasi fungsi percobaan disajikan secara lengkap pada Tabel 5.8 dan Tabel 5.9 dapat dilihat pada Lampiran 4. Berdasarkan estimasi parameter dalam Tabel 5.8, diperoleh bentuk estimasi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel sebagai berikut:

$$\hat{y} = 0,09x_{1i} + 0,56 + 0,88 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) + 3,26x_{2i} - 5,42(x_{2i} - 0,31)_+ + 3,11(x_{2i} + 0,67)_+ \quad (5.6)$$

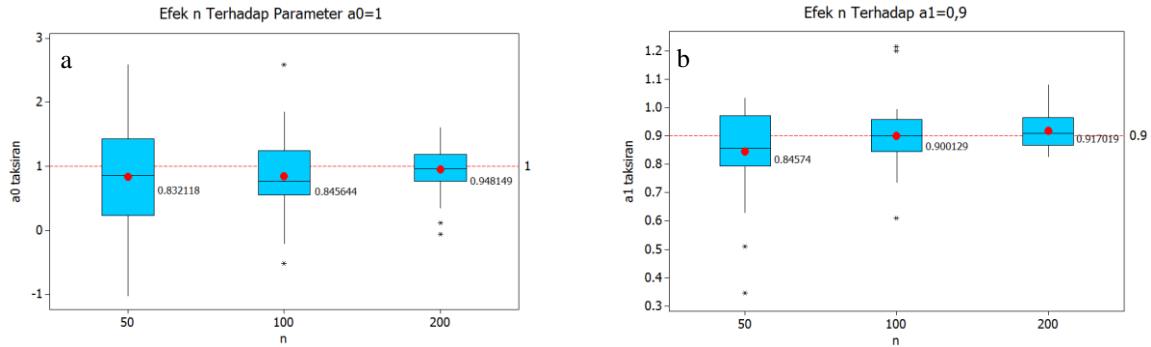
Mengacu pada Tabel 5.8 dapat diketahui bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan. Model ini mempunyai nilai $R^2 = 99,29121$ dan $MSE = 0,063006$

Model simulasi M_{12} merupakan model fungsi gabungan deret Fourier dengan $K=1$ dan fungsi spline *truncated* linear dua titik knot, $n=100$ dan $\sigma^2 = 0,1$; dengan cara serupa ditampilkan dalam bentuk *boxplot*. Data simulasi dibangkitkan dengan variasi ukuran sampel $n= 50, n=100$ dan $n=200$, variasi ukuran varians $\sigma^2 = 0,1$; $\sigma^2=0,5$ dan $\sigma^2=1$, variasi $K=1, K=2$ dan $K=3$ dan variasi ukuran titik knot yaitu satu titik knot, dua titik knot dan tiga titik knot. Disajikan dalam Gambar 5.21 pada Lampiran 5. Gambar 5.21 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* K_1r_2 untuk ketepatan model ukuran sampel n dan estimasi parameter b .



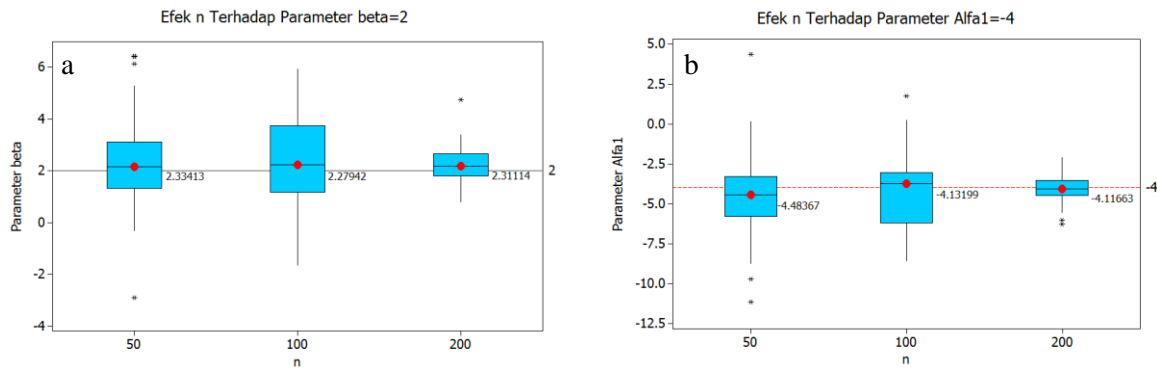
Gambar 5.21 Ketepatan Model untuk n (a), dan Estimasi b (b).

Bertitik tolak dari Gambar 5.21 (a) dan (b), dapat diketahui bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka ketepatan model untuk ukuran sampel n dan estimasi parameter b semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Selanjutnya Gambar 5.22 (a) dan (b) disajikan studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 , sebagai berikut :



Gambar 5.22 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).

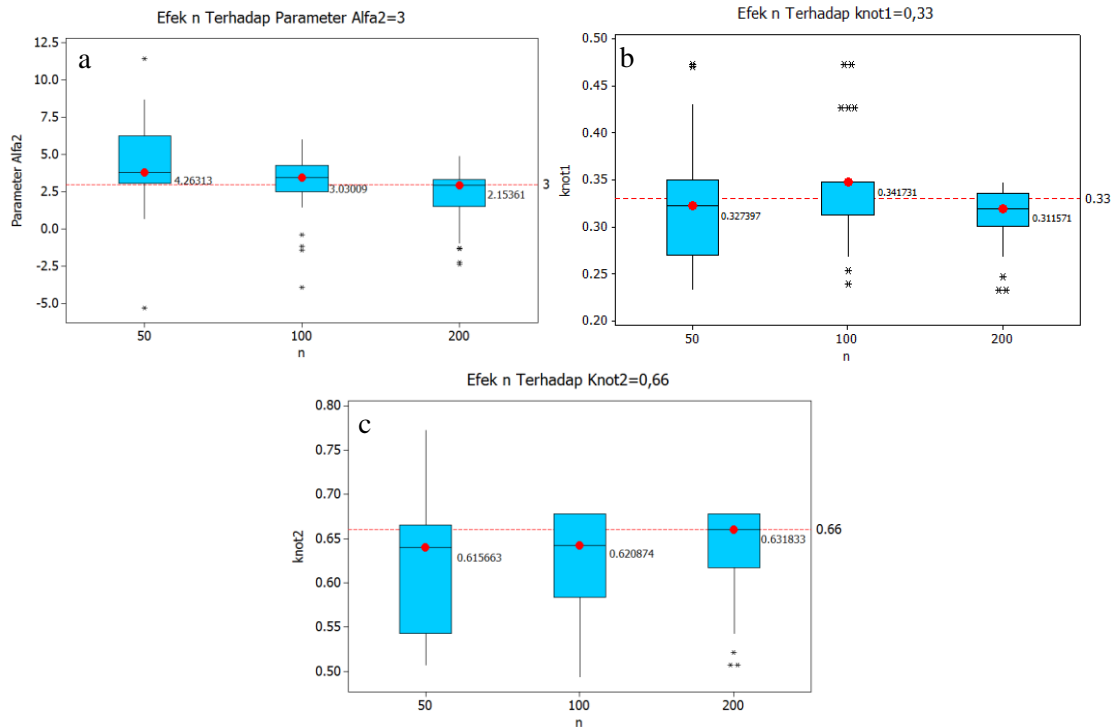
Berdasarkan Gambar 5.22 (a) dan (b) dapat diperoleh informasi fakta bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi parameter a_0 dan a_1 mendekati nilai parameter a_0 dan a_1 yang sesungguhnya. Gambar 5.23 (a) dan (b) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter β dan α_1 , sebagai berikut.



Gambar 5.23 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b).

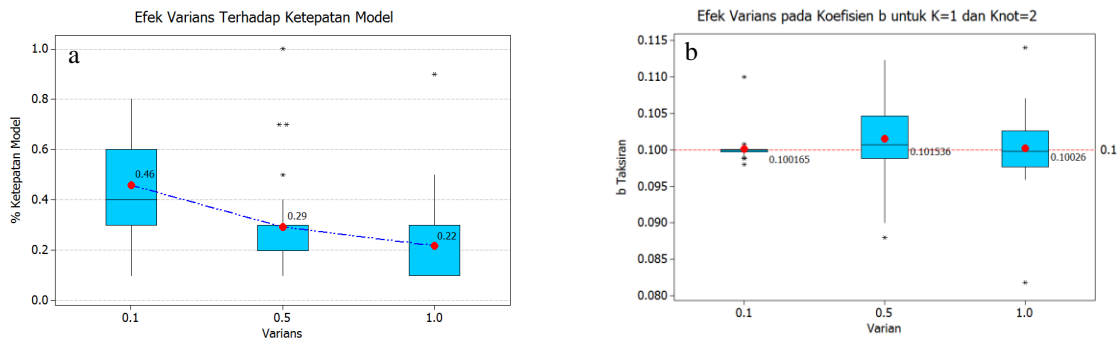
Mengacu pada Gambar 5.23 (a) dan (b) dapat dideskripsikan bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi parameter β dan α_1 mendekati nilai parameter β dan α_1 yang sesungguhnya. Berikutnya Gambar 5.24 (a) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan

spline *truncated*, untuk estimasi parameter α_2 . Gambar 5.24 (b) dan (c) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi nilai titik knot satu dan titik knot dua. Dapat dilihat dalam Gambar 5.24.



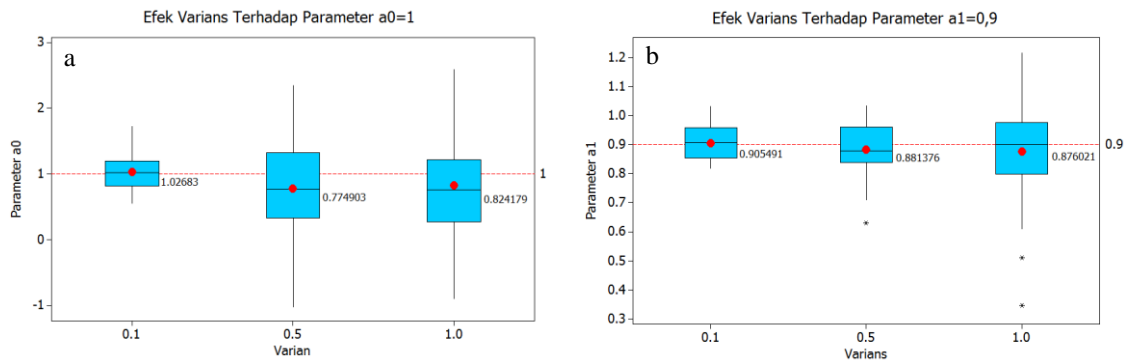
Gambar 5.24 Estimasi α_2 (a), Estimasi t_1 (b), dan Estimasi t_2 (c).

Dengan mengamati Gambar 5.24 (a), dinyatakan bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi parameter α_2 mendekati nilai parameter α_2 yang sesungguhnya. Gambar 5.24 (b) dan (c) terlihat juga, bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi rata-rata nilai titik knot satu dan titik knot dua mendekati nilai yang sesungguhnya. Selanjutnya model hasil simulasi variasi ukuran varians $\sigma^2 = 0,1$; $\sigma^2 = 0.5$ dan $\sigma^2 = 1$. Gambar 5.25 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk ukuran ketepatan varians σ^2 dan estimasi parameter b .



Gambar 5.25 Ketepatan Model untuk σ^2 (a), dan Estimasi b (b).

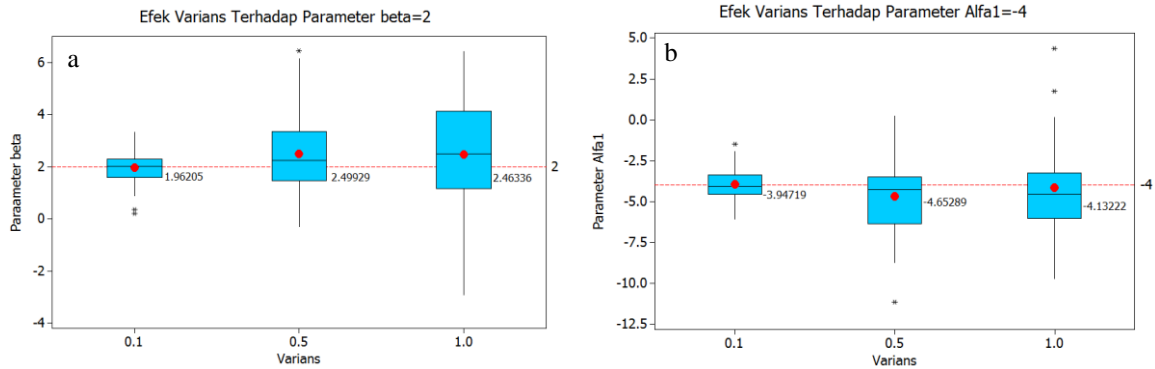
Berdasarkan pada Gambar 5.25 (a), diketahui bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung kesesuaian model semakin baik atau semakin mendekati model yang sesungguhnya. Gambar 5.25 (b) terlihat juga, bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung menghasilkan rata-rata estimasi parameter b mendekati nilai parameter b yang sesungguhnya. Selanjutnya Gambar 5.26 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 , sebagai berikut.



Gambar 5.26 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b)

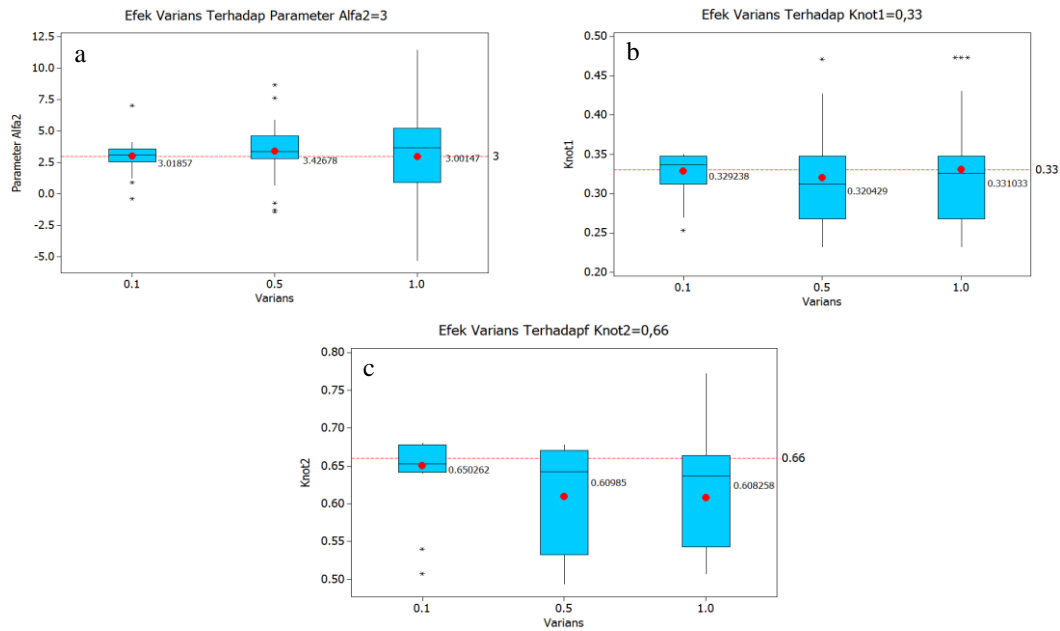
Mengacu pada Gambar 5.26 (a) dan (b) ditunjukkan bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung estimasi parameter a_0 dan a_1 mendekati nilai parameter a_0 dan a_1 yang sesungguhnya. Selanjutnya Gambar 5.27 (a) dan (b)

Menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter β dan α_1 . Ditampilkan dalam Gambar 5.27.



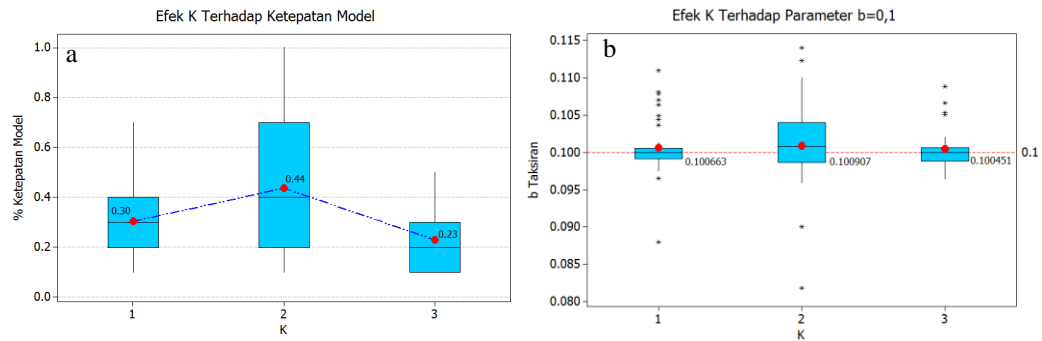
Gambar 5.27 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b).

Berdasarkan Gambar 5.27 (a) dan (b) dapat dideskripsikan bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung estimasi parameter β dan α_1 mendekati nilai parameter β dan α_1 yang sesungguhnya. Berikutnya Gambar 5.28 (a), menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter α_2 . Gambar 5.28 (b) dan (c) disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk nilai titik knot satu dan nilai titik knot dua. Hasil simulasi ini akan menyajikan apakah semakin kecil varians nilai estimasi parameter akan semakin baik, Demikian pula sebaliknya, apakah semakin besar varians nilai estimasi parameter akan semakin jelek. Estimasi parameter yang diperoleh dari hasil simulasi diharapkan dapat mewakili nilai-nilai parameter yang mendekati nilai yang sesungguhnya atau mendekati nilai aslinya. Berikut ini ditampilkan hasil studi simulasi estimasi nilai parameter α_2 , titik knot t_1 dan titik knot t_2 , disajikan dalam Gambar 5.28.



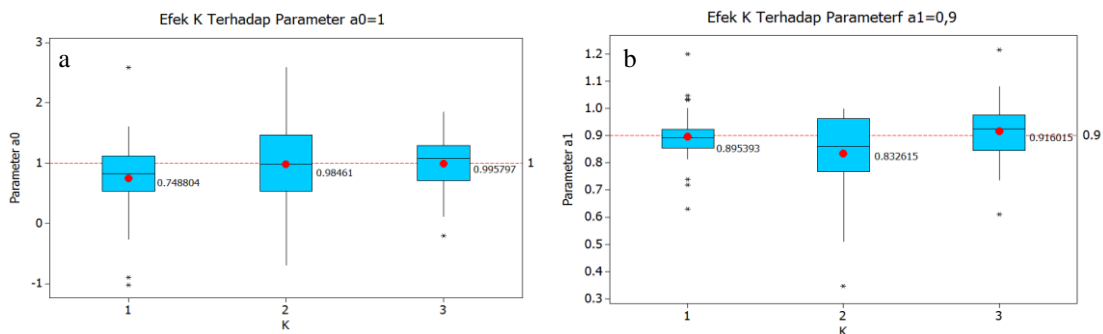
Gambar 5.28 Estimasi α_2 (a), Estimasi titik knot t_1 (b), dan Estimasi titik knot t_2 (c).

Berpedoman pada Gambar 5.28 (a), diketahui bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung estimasi parameter α_2 mendekati nilai parameter α_2 yang sesungguhnya. Gambar 5.28 (b) dan (c) juga terlihat, bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung estimasi nilai titik knot satu dan dua mendekati nilai titik knot satu dan dua yang sesungguhnya. Selanjutnya hasil simulasi variasi ukuran $K=1$, $K=2$, dan $K=3$. Gambar 5.29 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk ketepatan model K dan estimasi b .



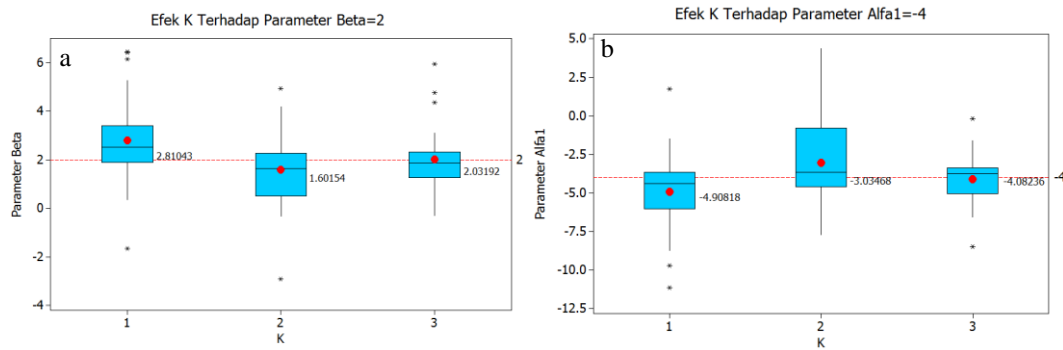
Gambar 5.29 Ketepatan Model untuk K (a), dan Estimasi b (b).

Berdasarkan pada Gambar 5.29 (a), dapat dideskripsikan bahwa semakin besar ukuran K , tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Oleh karena itu dalam estimator gabungan deret fourier dan spline *truncated* akan dilakukan pemilihan parameter K optimal. Gambar 5.29 (b), bahwa semakin besar K , ada kecenderungan hasil estimasi parameter b semakin baik atau sesuai dengan model sesungguhnya. Berikutnya Gambar 5.30 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 , sebagai berikut:



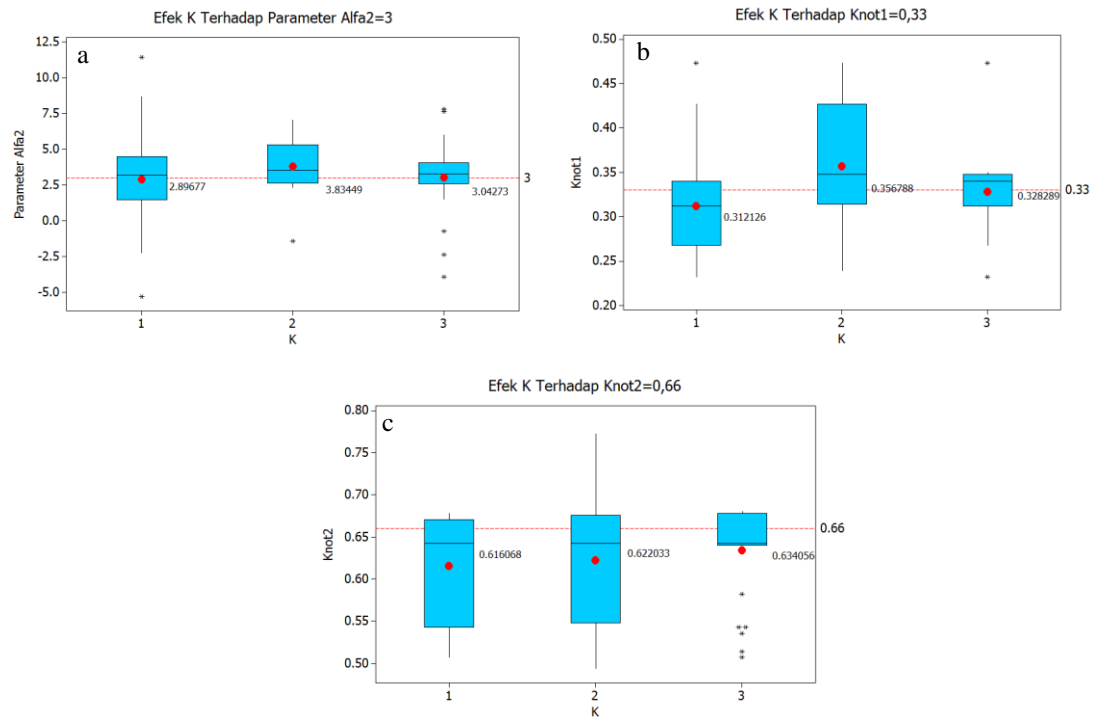
Gambar 5.30 Estimasi a_0 (a), dan Estimasi a_1 (b).

Bertitik tolak dari Gambar 5.30 (a) dan (b) diperoleh informasi fakta bahwa semakin besar ukuran K , ada kecenderungan hasil estimasi parameter a_0 dan a_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Gambar 5.31 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter β dan α_1 .



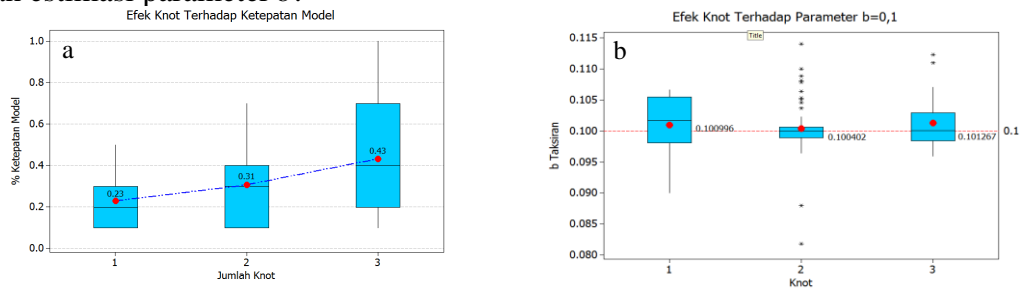
Gambar 5.31 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b).

Mengacu pada Gambar 5.31 (a) dan (b) dapat ditunjukkan bahwa semakin besar ukuran K ada kecenderungan diperoleh hasil rata-rata estimasi parameter β dan α_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Selanjutnya Gambar 5.32 (a), menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter α_2 . Gambar 5.32 (b) dan (c) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi nilai titik knot satu dan titik knot dua. Dapat ditampilkan dalam Gambar 5.32.



Gambar 5.32 Estimasi α_2 (a), Estimasi titik knot t_1 (b), dan Estimasi titik knot t_2 (c).

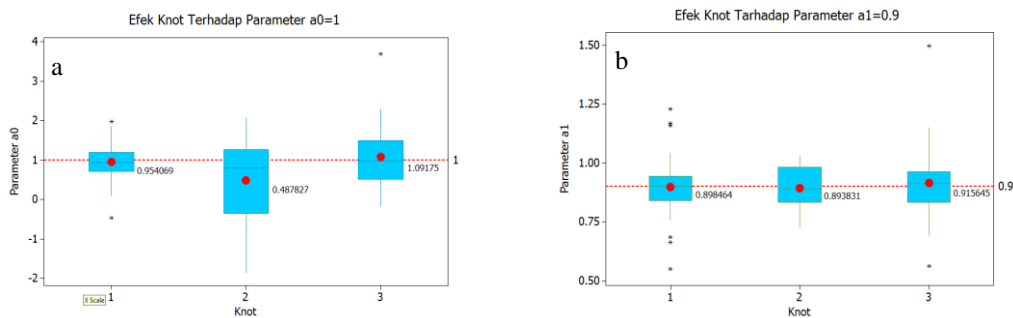
Dengan mengamati Gambar 5.32 (a), dapat diperoleh fakta bahwa semakin besar ukuran K , cenderung estimasi parameter α_2 mendekati nilai parameter α_2 yang sesungguhnya. Gambar 5.32 (b) dan (c) terlihat juga, bahwa semakin besar ukuran K , cenderung estimasi rata-rata nilai titik knot satu dan dua mendekati nilai yang sesungguhnya. Selanjutnya hasil simulasi variasi ukuran knot, satu knot, dua knot dan tiga knot. Gambar 5.33 (a) dan (b) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk variasi ukuran knot t dan estimasi parameter b .



Gambar 5.33 Ketepatan Model terhadap knot t (a), dan Estimasi b (b).

Bertitik tolak dari Gambar 5.33 (a) dan (b) dapat ditunjukkan bahwa semakin besar ukuran knot dan estimasi parameter b , cenderung diperoleh hasil ketepatan model semakin baik atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Walaupun demikian titik knot yang terlalu banyak juga akan menghasilkan model yang sangat kompleks, sehingga perlu dijadikan pertimbangan untuk pemilihan titik knot optimal untuk kumpulan data.

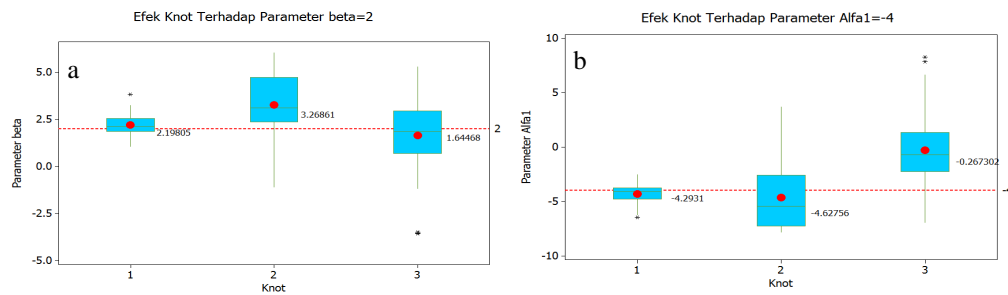
Selanjutnya Gambar 5.34 (a) dan (b), menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter a_0 dan a_1 . Dapat ditampilkan dalam Gambar 5.34.



Gambar 5.34 Estimasi a_0 (a), dan Estimaasi a_1 (b).

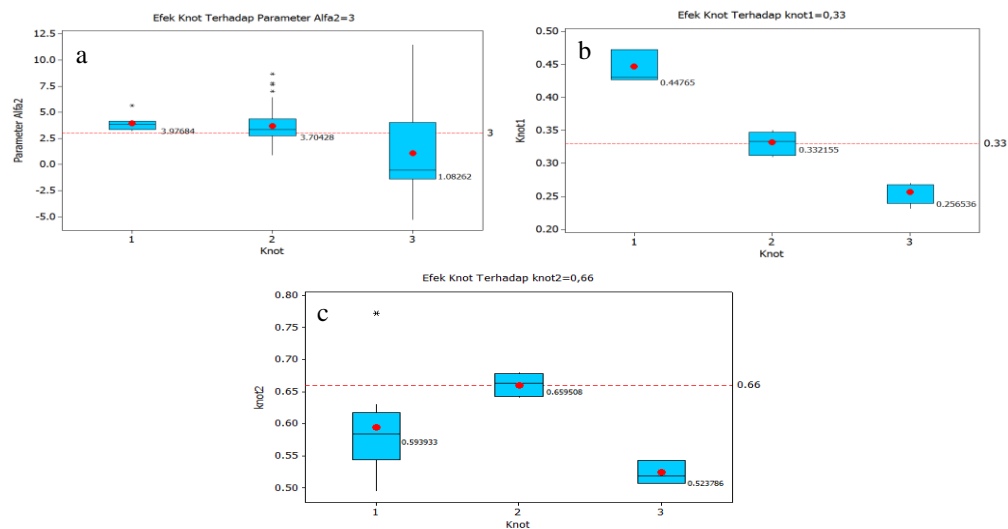
Dengan mengamati Gambar 5.34 (a) dan (b) dapat diperoleh data bahwa semakin besar ukuran knot, kecenderungan diperoleh hasil rata- rata estimasi parameter a_0 dan a_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai aslinya. Selanjutnya

Gambar 5.35 (a) dan (b) menyajikan studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter β dan α_1 , sebagai berikut.



Gambar 5.35 Estimasi β (a), dan Estimasi α_1 (b).

Mengacu pada Gambar 5.35 (a) dan (b) diperoleh data bahwa semakin besar ukuran knot kecenderunga diperoleh hasil rata - rata estimasi parameter β dan α_1 semakin baik atau semakin mendekati nilai sesungguhnya. Gambar 5.36 (a), dapat disajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi parameter α_2 . Gambar 5.36 (b) dan (c) menyajikan hasil studi simulasi model estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, untuk estimasi nilai titik knot t_1 dan t_2 .



Gambar 5.36 Estimasi α_2 (a), Estimasi t_1 (b), dan Estimasi t_2 (c).

Berdasarkan Gambar 5.36 (a), dapat diketahui bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka cenderung estimasi parameter α_2 mendekati nilai parameter α_2

yang sesungguhnya. Demikian juga Gambar 5.36 (b) dan (c) dapat dideskripsikan, bahwa apabila semakin besar ukuran knot, maka cenderung estimasi rata-rata nilai titik knot t_1 dan t_2 mendekati nilai yang sesungguhnya.

5.3 Model Fungsi M_{13}

Bertitik tolak dari Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{13} merupakan model fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=1$ dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* linear dengan 3 titik knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,25)_+ + 3(x_{2i} - 0,52)_+ - \\ &\quad 5(x_{2i} - 0,80)_+ + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Selanjutnya dari persamaan (5.7) dibangkitkan: $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini akan didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) . $i = 1, 2, \dots, 100$.

Berdasarkan data bangkitan maka dicobalah model regresi fungsi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i \quad (5.8)$$

dengan $K = 1, K = 2, K = 3$ dan $r = 1, r = 2, r = 3$.

Berpedoman pada hasil simulasi dalam Tabel 5.10 pada Lampiran 6, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi regresi estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & 0,10x_{1i} + 1,15 + 0,93 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) + 1,8x_{2i} - 4,29(x_{2i} - 0,26)_+ + 3,53(x_{2i} + 0,54)_+ - \\ & 4,38(x_{2i} + 0,81)_+ \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mengacu pada Tabel 5.11, diperoleh hasil bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Bertitik tolak pada Gambar 5.37, pada Lampiran 7 dapat diketahui bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.38 juga terlihat, bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Mengacu pada Gambar 5.39, dapat dideskripsikan bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Dari Gambar 5.40, ditunjukkan bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka kecenderungan estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Walaupun demikian titik knot yang terlalu banyak juga akan menghasilkan model yang sangat kompleks, sehingga perlu dijadikan pertimbangan untuk pemilihan titik knot optimal untuk kumpulan data. Gambar 5.41 juga terlihat, bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , varians σ^2 , osilasi K , dan banyaknya titik knot, maka cenderung estimasi parameter, $b, a_0, a_1, \beta, \alpha_1, \alpha_2$ dan α_3 , serta nilai titik knot satu, knot dua, dan knot tiga, mendekati nilai yang sesungguhnya.

5.4 Model Fungsi M_{21}

Mengacu pada Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{21} merupakan model fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=2$

dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* dengan satu titik knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$y_i = f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

$$= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,4 \cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,45)_+ + \varepsilon_i.$$

Selanjutnya dari persamaan (5.10) dibangkitkan: $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini akan didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Berdasarkan pada data bangkitan maka model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.11)$$

dengan $K = 1, 2, 3$ dan $r = 1, 2, 3$.

Mengacu pada hasil estimasi parameter dalam Tabel 5.12, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi regresi estimator gabungan deret Fourier dan splin *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel dengan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{y}_i = 0,9x_{1i} + 1,43 + 0,87 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,42 \cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 1,4x_{2i} - 3,17(x_{2i} - 0,46)_+ \quad (5.12)$$

Bertitik tolak dari Tabel 5.13 pada Lampiran 8 diperoleh bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Dengan mengamati Gambar 5.42 pada Lampiran 9 dapat diperoleh data bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Terlihat juga Gambar 5.43, diketahui bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.44 diperoleh

informasi data bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Berdasarkan Gambar 5.45, diketahui bahwa semakin besar ukuran knot, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Mengacu pada Gambar 5.46, diperoleh data bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , ukuran varians σ^2 , ukuran K dan titik knot, maka cenderung estimasi parameter $b, a_0, a_1, a_2, \beta, \alpha_1$ dan nilai titik knot satu mendekati nilai yang sesungguhnya.

5.5 Model Fungsi M_{22}

Berpedoman pada Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{22} merupakan model fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=2$ dan $f_2(x_{1i})$: fungsi polinomial spline *truncated* linear dengan dua titik knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9 \cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,4 \cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,45)_+ + \\ &\quad 3(x_{2i} - 0,66)_+ + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Selanjutnya dari persamaan (5.13) dibangkitkan : $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini akan didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Selanjutnya dicoba model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.14)$$

dengan $K = 1, 2, 3$ dan $r = 1, 2, 3$.

Berdasarkan estimasi parameter dalam Tabel 5.14, maka diperoleh bentuk estimasi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & 0,09x_{1i} + 1,13 + 0,89\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,46\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 2,03x_{2i} - 4,13(x_{2i} - 0,34)'_{+} + \\ & 3,09(x_{2i} + 0,67)'_{+} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Terlihat dari Tabel 5.15 pada Lampiran 10 dapat diketahui bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Mengacu pada Gambar 5.47 pada Lampiran 11 diperoleh data bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Bertitik tolak dari Gambar 5.48, diketahui bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka cenderung estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Bertitik tolak pada Gambar 5.49 diketahui bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Terlihat juga Gambar 5.50 menunjukkan bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka cenderung estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.51 dapat diketahui bahwa semakin besar ukuran knot, cenderung estimasi parameter $b, a_0, a_1, a_2, \beta, \alpha_1, \alpha_2$ dan nilai knot satu, knot dua, mendekati nilai sesungguhnya.

5.6 Model Fungsi M_{23}

Bertitik tolak pada Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{23} merupakan fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=2$

dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* dengan tiga knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,4\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,25)_+ + \\ &\quad 3(x_{2i} - 0,52)_+ - 0,5(x_{2i} - 0,66)_+ + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Selanjutnya dari persamaan (5.16) dibangkitkan : $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Berdasarkan data bangkitan maka dicoba model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.17)$$

dengan $K = 1, 2, 3$ dan $r = 1, 2, 3$.

Berdasarkan estimasi parameter dalam Tabel 5.16, maka diperoleh bentuk estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= 0,09x_{1i} + 0,87 + 0,91\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,40\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 2,72x_{2i} - 5,80(x_{2i} - 0,26)_+ + \\ &\quad 5,35(x_{2i} + 0,53)_+ - 5,54(x_{2i} + 0,78)_+ \end{aligned} \quad (5.18)$$

Bertitik tolak dari Tabel 5.17 pada Lampiran 12 ditentukan bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Mengacu pada Gambar 5.52 pada Lampiran 13 ditunjukkan bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.53 terlihat bahwa semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model

yang disimulasikan. Berdasarkan Gambar 5.54, diperoleh data bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.55 terlihat, bahwa apabila semakin besar variasi ukuran knot, maka cenderung estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Berpedoman pada Gambar 5.56, diketahui bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , variasi varians σ^2 , variasi K , dan variasi ukuran titik knot, maka cenderung menghasilkan rata-rata estimasi parameter b, a_0, a_1, a_2 , dan $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, titik knot t_1, t_2 dan t_3 , mendekati nilai yang sesungguhnya.

5.7 Model Fungsi M_{31}

Berdasarkan Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{31} fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=3$ dan $f_2(x_{1i})$: fungsi polinomial spline *truncated* dengan satu knot. Persamaan fungsi regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,4\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 0,1\cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - \\ &\quad 4(x_{2i} - 0,45)_+ + \varepsilon_i. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Selanjutnya dari persamaan (5.19) dibangkitkan: $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini akan didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Berpedoman pada data bangkitan maka dicoba model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.20)$$

dengan $K=1,2,3$ dan $r=1,2,3$.

Berdasarkan estimasi parameter dalam Tabel 5.19, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi regresi estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & 0,10x_{1i} + 1,27 + 0,93\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,38\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 0,09\cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{100}\right) + 1,56x_{2i} - \\ & 3,79(x_{2i} + 0,47)_+ \end{aligned} \quad (5.21)$$

Bertitik tolak dari Tabel 5.19 pada Lempiran 14 diketahui bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Selanjutnya dari Gambar 5.57 pada Lempiran 15 diketahui bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka cenderung estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.58 dideskripsikan bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.59 ditunjukkan bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Demikian dari Gambar 5.60, dinyatakan bahwa apabila semakin besar ukuran knot, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.61 juga terlihat, bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , variasi ukuran varian σ^2 , variasi ukuran osilasi K , dan variasi ukuran knot, maka cenderung estimasi parameter b, a_0, a_1, a_2, a_3 , dan β, α_1 , titik knot satu, mendekati nilai yang sesungguhnya.

5.8 Model Fungsi M_{32}

Berpedoman pada Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{32} merupakan fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=3$ dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* dengan dua knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i=1,2,\dots,n \\ &= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,4\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 0,1\cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{100}\right) + 2x_{2i} - \\ &\quad 4(x_{2i} - 0,33)_+ + 3(x_{2i} - 0,66)_+ + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Selanjutnya dari persamaan (5.22) dibangkitkan: $x_{1i} \sim U(1,n)$, $x_{2i} \sim U(0,1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini akan didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1,2,\dots,100$. Berdasarkan informasi data bangkitan maka, dicoba model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.23)$$

dengan $K = 1, K = 2$ dan $K = 3$, demikian juga $r = 1, r = 2$ dan $r = 3$.

Berdasarkan estimasi parameter dalam Tabel 5.20, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi regresi estimator gabungan deret Fourier dan splin *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= 0,10x_{1i} + 1,2 + 0,82\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,38\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 0,09\cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{100}\right) + 1,51x_{2i} - \\ &\quad 4,03(x_{2i} + 0,34)_+ + 3,32(x_{2i} + 0,64)_+ \end{aligned} \quad (5.24)$$

Bertitik tolak dari Tabel 5.20 pada Lampiran 16 diketahui bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Selanjutnya dari Gambar 5.62 pada Lampiran 17 dinyatakan bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.63 juga terlihat bahwa jika semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Mengacu pada Gambar 5.64 dinyatakan bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Bertitik tolak pada Gambar 5.65 diketahui bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.66 juga terlihat, bahwa apabila semakin besar ukuran sampel n , variasi ukuran varians σ^2 , variasi ukuran osilasi K , dan variasi ukuran knot, maka cenderung estimasi parameter b, a_0, a_1, a_2, a_3 dan $\beta, \alpha_1, \alpha_2$, titik knot t_1, t_2 , mendekati nilai sesungguhnya.

5.9 Model Fungsi M_{33}

Mengacu pada Tabel 5.1, 5.2, dan 5.3, model simulasi fungsi percobaan M_{33} merupakan fungsi gabungan antara $f_1(x_{1i})$: fungsi deret Fourier dengan $K=3$ dan $f_2(x_{2i})$: fungsi polinomial spline *truncated* dengan tiga titik knot. Persamaan regresi yang dirancang untuk studi simulasi ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y_i &= f_1(x_{1i}) + f_2(x_{2i}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 &= 0,1x_{1i} + 1 + 0,9\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,4\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 0,1\cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{100}\right) + \\
 &\quad 2x_{2i} - 4(x_{2i} - 0,25)_+ + 3(x_{2i} + 0,52)_+ - 5(x_{2i} + 0,80)_+ + \varepsilon_i.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Selanjutnya dari persamaan (5.25) dibangkitkan: $x_{1i} \sim U(1, n)$, $x_{2i} \sim U(0, 1)$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, dengan $\sigma^2 = 0,1$ dan ukuran sampel $n = 100$. Dari persamaan ini didapat data bangkitan (x_{1i}, x_{2i}, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Selanjutnya dicoba model regresi gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sebagai berikut:

$$y_i = bx_{1i} + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k\left(\frac{2\pi x_{1i}}{n}\right) + \beta x_{2i} + \sum_{u=1}^r \alpha_u (x_{2i} - t_u)_+ + \varepsilon_i. \quad (5.26)$$

dengan $K = 1, 2, 3$ dan $r = 1, 2, 3$.

Berdasarkan estimasi parameter dalam Tabel 5.21, maka diperoleh bentuk estimasi fungsi regresi estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & 0,09x_{1i} + 0,64 + 0,93\cos\left(\frac{2\pi x_{1i}}{100}\right) - 0,41\cos\left(\frac{4\pi x_{1i}}{100}\right) + 0,15\cos\left(\frac{6\pi x_{1i}}{100}\right) + 3,1x_{2i} - \\ & 5,7(x_{2i} + 0,24)_+ + 3,1(x_{2i} + 0,51)_+ - 3,64(x_{2i} + 0,81)_+ \end{aligned} \quad (5.27)$$

Terlihat dari Tabel 5.21 pada Lampiran 18 diketahui bahwa nilai estimasi parameter dan titik knot, cenderung mendekati nilai dari model asli atau model yang disimulasikan.

Selanjutnya dari Gambar 5.67 pada Lampiran 19 ditentukan bahwa jika semakin besar ukuran sampel n , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Berdasarkan pada Gambar 5.68 diketahui bahwa apabila semakin kecil ukuran varians σ^2 , maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Gambar 5.69 juga terlihat, bahwa tidak ada kecenderungan semakin besar ukuran K yang digunakan, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Mengacu pada Gambar 5.70 dinyatakan bahwa jika semakin besar ukuran knot, maka estimasi model yang diperoleh semakin mendekati model aslinya atau semakin sesuai dengan model yang disimulasikan. Bertitiktolak dari Gambar 5.71 dinyatakan bahwa apabila semakin besar ukuran

sampel n , variasi ukuran varians σ^2 , variasi ukuran K , dan variasi ukuran titik knot, maka cenderung estimasi parameter b, a_0, a_1, a_2, a_3 dan $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nilai titik knot satu, titik knot dua, dan titik knot tiga, teridentifikasi mendekati nilai sesungguhnya dengan penyebaran hasil estimasi varians yang relatif lebih kecil.

Berikutnya Tabel 5.22 menyajikan hasil simulasi untuk ketepatan model M_{11} , nilai GCV minimum, λ optimal, nilai determinasi R^2 dan nilai MSE terhadap ukuran sampel n , ukuran varians σ^2 dan variasi $K=1, K=2$ dan $K=3$ serta variasi ukuran titik knot yaitu satu titik knot, dua titik knot dan tiga titik knot dengan $n=100$ dan $\sigma^2 = 0,1$ sebagai berikut:

Tabel 5.22 Ketepatan Model, Nilai GCV , λ optimal, R^2 dan MSE Fungsi M_{11}

Ulangan	Osilasi: K	Banyaknya Knot: r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE	Lokasi Knot		
							1	2	3
1	3	3	0,104	0,0605	98,96	0,095	0,23	0,52	0,81
2	1	1	0,110	0,0007	98,82	0,105	0,45	*	*
3	3	1	0,110	0,0015	98,83	0,102	0,46	*	*
4	1	3	0,108	0,0008	98,85	0,200	0,23	0,54	0,80
5	1	1	0,095	0,0006	99,04	0,091	0,44	*	*
6	2	1	0,089	0,0055	99,05	0,084	0,44	*	*
7	1	1	0,076	0,0005	99,21	0,073	0,45	*	*
8	1	3	0,099	0,0006	99,00	0,094	0,26	0,51	0,79
9	2	1	0,103	0,0030	98,91	0,097	0,44	*	*
10	3	1	0,096	0,0015	99,05	0,090	0,47	*	*

Mengacu pada Tabel 5.22 bahwa model M_{11} menunjukkan 30% dari sepuluh kali ulangan yang dilakukan, terjadi pada ulangan 2, 5 dan 7 dengan nilai GCV minimum 0,076 dan nilai determinasi $R^2 = 99,21$ pada ulangan ke 7.

5.10 Kesimpulan Hasil Simulasi.

Berdasarkan hasil simulasi yang telah diuraikan dalam sub Bab sebelumnya maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Apabila ukuran sampel n semakin besar, maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* semakin baik, untuk semua variasi varians σ^2 , banyaknya titik knot dan parameter osilasi K .
2. Jika varians σ^2 semakin kecil, maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* semakin baik atau semakin mendekati model yang sesungguhnya, untuk semua kombinasi banyaknya sampel n , banyaknya titik knot dan osilasi parameter K .
3. Jika titik knot yang digunakan semakin banyak, maka ada kecenderungan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* semakin baik, untuk semua kombinasi sampel n , varians σ^2 dan osilasi parameter K . Walaupun demikian titik knot yang terlalu banyak juga akan menghasilkan model yang sangat kompleks, sehingga perlu dipilih titik knot optimal.
4. Jika ukuran parameter osilasi K semakin banyak, maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* tidak semakin baik. Oleh karena itu akan perlu dilakukan pemilihan parameter osilasi K yang optimal.
5. Jika parameter penghalus sangat besar ($\lambda \rightarrow \infty$), maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat *smooth* (global).
6. Apabila parameter penghalus sangat kecil ($\lambda \rightarrow 0$), maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat kasar (lokal).

BAB 6

HASIL PEMODELAN PRODUKSI PADI DI PROVINSI BALI

Pada Bab ini diuraikan mengenai pemodelan regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated* pada data produksi padi di Provinsi Bali, untuk menjawab tujuan ke tiga dari penelitian. Pemodelan dilakukan berdasarkan tahapan-tahapan yang telah diberikan dalam metodologi penelitian (Bab 3 sub bab 3.4).

6.1 Deskripsi Data Produksi Padi

Data yang digunakan dalam penelitian adalah data sekunder tahun 2015 dengan banyak $n = 57$ yang bersumber dari Badan Pusat Statistika (BPS) dan Balai Besar Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BBMKG) Provinsi Bali. Data produksi padi di Provinsi Bali disajikan secara lengkap pada Lampiran 20. Output program *R* pada Lampiran 21 dan output estimasi pada Lampiran 22. Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari variabel respon dan variabel prediktor. Variabel respon dari penelitian ini adalah produksi padi disetiap kecamatan yang ada di Provinsi Bali. Sedangkan variabel prediktor terdiri dari atas 4 (empat) variabel yaitu luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Unit observasi yang digunakan adalah seluruh wilayah Kecamatan di Kabupaten/Kota yang ada di Provinsi Bali.

Selanjutnya dilakukan analisis deskriptif terhadap data produksi padi di Provinsi Bali dengan masing-masing variabel luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Analisis deskriptif bertujuan untuk mendapatkan gambaran yang jelas tentang rata-rata produksi padi dengan 3 (tiga) kali panen pertahun. Demikian juga rata-rata luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin dilakukan dengan pengamatan yang sama. Tabel 6.1 menyajikan hasil analisis deskriptif dari masing-masing variabel sebagai berikut.

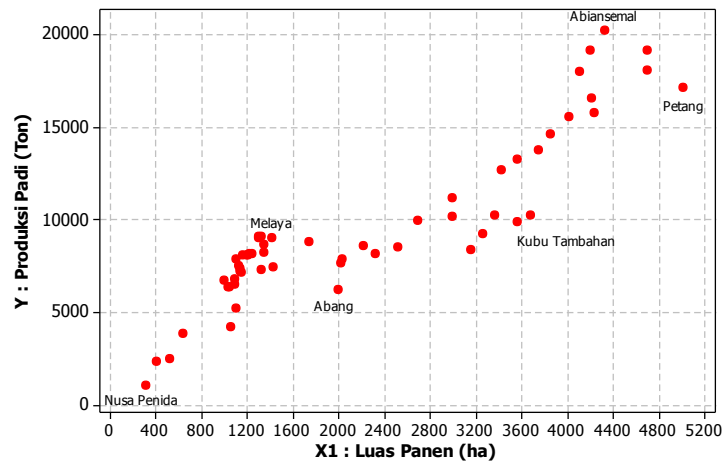
Tabel 6.1 Deskripsi Statistika Variabel Penelitian pada Data Riil

Variabel	Rata-rata	Std.dev.	Minimum	Maksimum	Range
y	9582	4354	1080	20212	19132
x_1	2218	1334	311	5010	4699
x_2	233,49	55,49	148,50	325,20	176,70
x_3	28,47	1,49	24,90	30,60	5,70
x_4	6,01	2,22	2,10	10,10	8

Berdasarkan pada Tabel 6.1 dapat dilihat bahwa pada tahun 2015 rata-rata produksi padi di Provinsi Bali adalah 9582 ton. Produksi padi tertinggi adalah 20212 ton dan terendah 1080 ton. Demikian juga Provinsi Bali memanen padi rata-rata 2218 ha dengan luas panen tertinggi 5010 ha dan terendah 311 ha. Bali merupakan bagian dari Indonesia yang mempunyai iklim tropis dengan rata-rata curah hujan 233,49 mm, sedangkan curah hujan tertinggi adalah 325,2 mm dan terendah 148,5 mm. Rata-rata suhu udara sebesar 28,47⁰C, suhu udara tertinggi adalah 30,6⁰C dan terendah 24,9⁰C. Kecepatan angin rata-rata 6,005 knot, sedangkan tertinggi 10,1 knot dan terendah 2,1 knot.

Selanjutnya diselidiki pola hubungan antara variabel respon dan masing-masing prediktor untuk mengidentifikasi variabel prediktor yang dimodelkan dengan deret Fourier dan variabel prediktor yang dimodelkan dengan spline *truncated*. Identifikasi ini dilakukan dengan menggunakan *scatter plot*. Penyajian data dalam bentuk *scatter plot* bertujuan untuk melihat pola perilaku dari sebaran data. Apakah data tersebut berpola berulang pada sub interval tertentu maupun berubah pada sub-sub interval yang berlainan. Diharapkan ke 4 (empat) variabel tersebut mempunyai pola berulang maupun berubah pada sub interval tertentu. Hasil *scatterplot* atau sebaran data dalam penelitian ini disajikan dalam gambar berikut. Gambar 6.1

menyajikan pola hubungan dari variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor luas panen.

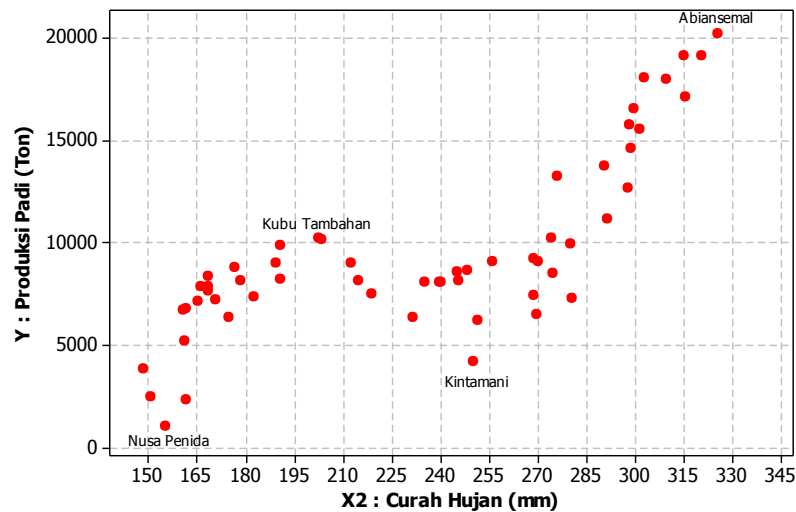


Gambar 6.1 Scatterplot Produksi Padi y dengan Luas Panen x_1

Berdasarkan Gambar 6.1 terlihat bahwa pola hubungan variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor luas panen menunjukkan pola hubungan yang tidak mengikuti suatu pola tertentu. Plot data mengindikasikan ada kecenderungan memiliki perubahan perilaku pada suatu interval tertentu. Pada interval luas panen dari 300 ha - 1400 ha terjadi peningkatan produksi padi yang cukup banyak. Sedangkan luas panen pada interval 1400 ha - 3300 ha produksi padi juga meningkat tetapi tidak sebesar pada interval sebelumnya. Demikian juga luas panen pada interval 3300 ha – 4300 ha produksi padi mengalami peningkatan yang cukup besar dibandingkan pada interval 1400 ha - 3300 ha. Berikutnya luas panen pada interval diatas 4300 ha – 5100 ha produksi padi mengalami sedikit penurunan. Penurunan produksi padi ini disebabkan karena terjadi gagal panen. Bertitik tolak dari analisis ini maka pola hubungan antara variabel x_1 (luas panen) dengan produksi padi menggunakan *spline truncated*.

Gambar 6.2 menyajikan pola hubungan dari variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor curah hujan. Identifikasi ini dilakukan dengan *scatter plot*,

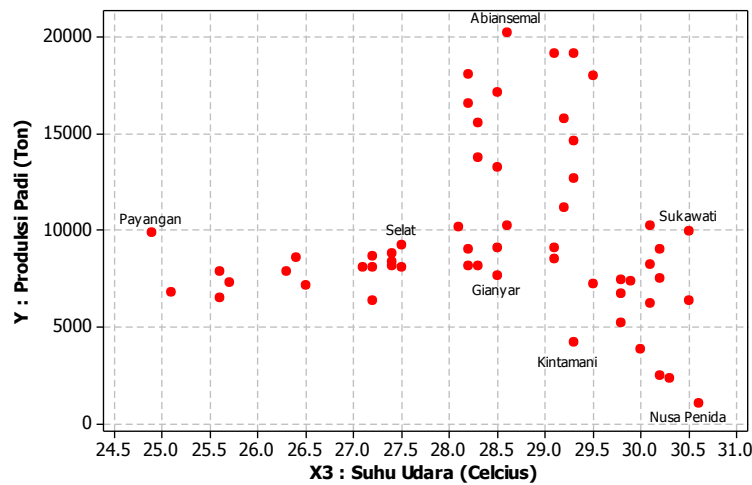
untuk melihat pola hubungan apakah data produksi padi dengan curah hujan memiliki pola berulang atau berubah pada sub-sub interval tertentu disajikan sebagai berikut.



Gambar 6.2 Scatterplot Produksi Padi y dengan Curah Hujan x_2

Mengacu pada Gambar 6.2 diketahui bahwa pola hubungan variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor curah hujan menunjukkan pola hubungan yang tidak mengikuti suatu pola tertentu. Plot data mengindikasikan tidak menunjukkan pola yang jelas atau ada kecenderungan memiliki perubahan perilaku pada suatu interval tertentu. Curah hujan pada interval 150 mm – 200 mm terjadi peningkatan produksi padi yang cukup banyak. Sedangkan curah hujan pada interval 200 mm – 270 mm produksi padi mengalami sedikit penurunan dari interval sebelumnya. Demikian juga curah hujan pada selang interval 270 mm - 300 mm terjadi peningkatan produksi padi yang cukup banyak. Berikutnya curah hujan diatas 300 mm produksi padi juga mengalami peningkatan yang tidak begitu banyak. Berdasarkan hasil analisis diskripsi ini, maka pola hubungan antara variabel curah hujan (x_2) dengan produksi padi menggunakan pendekatan spline *truncated*.

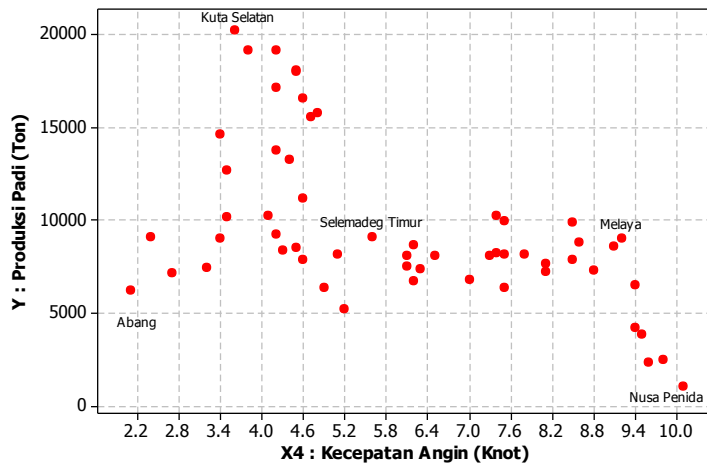
Variabel ketiga yang diduga mempengaruhi produksi padi adalah suhu udara. Gambar 6.3 menyajikan pola hubungan dari variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor suhu udara.



Gambar 6.3 Scatter plot Produksi Padi y dengan Suhu x_3

Bertitik tolak dari Gambar 6.3 terlihat bahwa pola hubungan variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor suhu udara, menunjukkan pola hubungan yang berulang pada sub-sub interval tertentu. Pada suhu udara dengan interval $25^{\circ}\text{C} - 26^{\circ}\text{C}$ produksi padi mengalami penurunan, dan suhu udara pada interval $26^{\circ}\text{C} - 28^{\circ}\text{C}$ terjadi peningkatan produksi padi. Suhu udara pada selang interval $28^{\circ}\text{C} - 29^{\circ}\text{C}$ produksi padi mengalami penurunan. Demikian juga pada selang interval $29^{\circ}\text{C} - 30^{\circ}\text{C}$ produksi padi meningkat. Suhu udara pada selang interval $30^{\circ}\text{C} - 31^{\circ}\text{C}$ produksi padi turun. Berdasarkan ilustrasi ini pola hubungan antara variabel x_3 (suhu udara) dengan produksi padi dihampiri dengan menggunakan deret Fourier

Variabel keempat yang diduga mempengaruhi produksi padi adalah kecepatan angin. Gambar 6.4 menyajikan pola hubungan dari variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor kecepatan angin.



Gambar 6.4 Scatterplot Produksi Padi y dengan Kecepatan Angin x_4

Dengan mengamati Gambar 6.4 diperoleh data bahwa pola hubungan variabel respon produksi padi dengan variabel prediktor kecepatan angin menunjukkan pola hubungan yang tidak mengikuti suatu pola tertentu. Plot dari data mengindikasikan suatu pola yang kurang jelas atau mengarah pada perubahan bentuk pola perilaku data berulang pada sub-sub interval tertentu. Pada kecepatan angin dari selang interval 2-4 knot produksi padi mengalami peningkatan yang cukup banyak. Sedangkan kecepatan angin pada selang interval 4-6 knot produksi padi mengalami penurunan yang cukup banyak dari interval sebelumnya. Selanjutnya kecepatan angin pada interval 6-9 knot produksi padi sedikit mengalami kenaikan. Pada kecepatan angin dari selang interval 9-10 knot produksi padi mengalami penurunan dari interval sebelumnya. Berpedoman pada hasil deskripsi ini maka pola hubungan antara kecepatan angin (x_4) dengan produksi padi didekati dengan menggunakan deret Fourier.

6.2 Uji Non Linearitas

Berikut ini diberikan uji Non linearitas dari *Terasvirta Neural Network Test* untuk mengidentifikasi pola data dengan menggunakan tingkat signifikansi 5%. Identifikasi ini digunakan untuk memodelkan pola data apakah menggunakan

pendekatan regresi parametrik ataupun menggunakan regresi nonparametrik. Hasil uji Non linieritas disajikan dalam Tabel 6.2.

Tabel 6.2 Uji Non-Linieritas *Terasvirta Neural Netwok Test* pada Data Riil

Hubungan	χ^2	P_{value}	Kesimpulan
x_1 terhadap y	16,07	0,0003	Non linear
x_2 terhadap y	59,67	$1,1 \times 10^{-13}$	Non linear
x_3 terhadap y	25,19	$3,30 \times 10^{-6}$	Non linear
x_4 terhadap y	7,07	0,0291	Non linear
x_1, x_2, x_3, x_4 terhadap y	127,73	$5,03 \times 10^{-13}$	Non linear

Berdasarkan Tabel 6.2 dapat diambil kesimpulan bahwa hubungan antara variabel luas panen, curah hujan, suhu dan kecepatan angin dengan variabel produksi padi adalah hubungan non-linier. Oleh karena itu pola hubungan antara variabel luas panen, curah hujan, suhu dan kecepatan angin dengan variabel produksi padi belum diketahui bentuk fungsi nonlinearnya, maka akan dimodelkan dengan menggunakan regresi nonparametrik multivariabel.

6.3. Pemodelan Produksi Padi Menggunakan Estimator Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated*

Pada pembahasan ini dilakukan pemodelan mengenai variabel-variabel yang diduga mempengaruhi produksi padi di Provinsi Bali. Metode yang digunakan untuk memodelkan data ini adalah regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated*. Alasan penggunaan metode ini telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Berikut adalah pemodelan produksi padi menggunakan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*.

Berdasarkan ilustrasi dari *scatterplot* pola hubungan variabel prediktor luas panen (x_1) dan variabel prediktor curah hujan (x_2) dengan variabel respon produksi padi, menunjukkan suatu pola perubahan perilaku pada interval tertentu, oleh karena itu

model yang digunakan adalah spline *truncated*. Pola hubungan variabel prediktor suhu udara (x_3) dan variabel prediktor kecepatan angin (x_4) dengan variabel respon produksi padi, memperlihatkan suatu bentuk perubahan pola perilaku data berulang pada sub-sub interval tertentu. Dengan demikian pola hubungan variabel-variabel menggunakan deret Fourier. Berikut ini diberikan model regresi nonparametrik campuran deret Fourier dan spline *truncated*, dimana variabel x_1 dan x_2 komponen spline *truncated* dan x_3 dan x_4 komponen deret Fourier, sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^2 \left(\beta_j x_{ji} + \sum_{u=1}^r \alpha_{uj} (x_{ji} - t_{uj})_+ \right) + \sum_{j=3}^4 \left(b_j x_{ji} + \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k \left(\frac{2\pi x_{ji}}{n} \right) \right) + \varepsilon_i.$$

Model regresi nonparametrik multivariabel gabungan spline *truncated* dan deret Fourier, sangat tergantung pada banyak dan letak titik knot dan nilai osilasi K . Untuk mendapatkan titik knot optimal dan nilai osilasi K optimal digunakan metoda *GCV*. Berikut ini diberikan hasil perhitungan nilai *GCV* minimum model regresi nonparametrik gabungan spline *truncated* dengan $r=1$, $r=2$, $r=3$, dan deret Fourier dengan $K=1$, $K=2$, $K=3$ yang disajikan dalam Tabel 6.3.

Tabel 6.3 *GCV* Minimum Model Gabungan Dua Prediktor Spline *Truncated* dan Dua Prediktor Deret Fourier

Model Gabungan	Variabel Prediktor				<i>GCV</i>	R^2
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	$t_1 = 3744,90$	$t_1 = 277,63$	$K=2$	$K=2$	1240900,95	93,87
2	$t_1 = 1485,73$	$t_1 = 192,70$	$K=3$	$K=3$	922748,57	95,92
	$t_2 = 3247,90$	$t_2 = 258,94$				
3	$t_1 = \mathbf{1595,92}$	$t_1 = \mathbf{196,70}$	$K=1$	$K=1$	668466,45	97,22
	$t_2 = \mathbf{3301,30}$	$t_2 = \mathbf{260,95}$				
	$t_3 = \mathbf{4582,82}$	$t_3 = \mathbf{309,11}$				
4	$t_1 = 1485,75$	$t_1 = 192,70$	$K=2$	$K=3$	920443,16	95,98
	$t_2 = 3247,90$	$t_2 = 258,94$				
5	$t_1 = 3744,88$	$t_1 = 277,63$	$K=3$	$K=1$	1248441,89	94,40

Tabel 6.3 (lanjutan) *GCV* Minimum Model Gabungan Dua Prediktor Spline *Truncated* dan Dua Prediktor Deret Fourier

Model Gabungan	Variabel Prediktor				<i>GCV</i>	R^2
	x_1	x_2	x_3	x_4		
6	$t_1 = 1485,75$	$t_1 = 192,68$	$K=1$	$K=3$	918185,68	95,98
	$t_2 = 3247,88$	$t_2 = 258,94$				
7	$t_1 = 1592,55$	$t_1 = 196,69$	$K=2$	$K=1$	669330,70	97,20
	$t_2 = 3301,27$	$t_2 = 260,95$				
	$t_3 = 4582,82$	$t_3 = 309,14$				
8	$t_1 = 3925,62$	$t_1 = 284,42$	$K=1$	$K=2$	1341773,20	93,87
9	$t_1 = 1592,20$	$t_1 = 196,10$	$K=3$	$K=2$	672738,60	97,12
	$t_2 = 3301,27$	$t_2 = 260,95$				
	$t_3 = 4582,82$	$t_3 = 309,14$				

Berdasarkan Tabel 6.3 diperoleh nilai *GCV* yang paling kecil adalah 668466,45 dengan $R^2 = 97,22\%$. Nilai *GCV* dari kombinasi model yang lain disajikan dalam Lampiran 23. Selanjutnya diberikan rangkuman nilai *GCV* minimum untuk kombinasi model dimana dua prediktor merupakan komponen spline *truncated* dan dua prediktor yang lain merupakan komponen deret Fourier. Nilai *GCV* minimum disajikan dalam Tabel 6.4.

Tabel 6.4 *GCV* Minimum untuk Model Gabungan Dua Prediktor Spline *Truncated* dan Dua Prediktor Deret Fourier

No	Model Gabungan	Variabel Prediktor				<i>GCV</i>	R^2
		x_1	x_2	x_3	x_4		
1	Spline x_1, x_2 Deret Fourier x_3, x_4	$t_1=1595,92$	$t_1=196,70$	$K=1$	$K=1$	668466,45	97,22
		$t_2=3301,27$	$t_2=260,95$				
		$t_3=4582,82$	$t_3=309,14$				
2	Spline x_1, x_3 Deret Fourier x_2, x_4	$t_1=1165,36$	$K=1$	$t_1=25,94$	$K=2$	1158135,65	95,05
		$t_2=3301,27$		$t_2=28,53$			
		$t_3=4582,82$		$t_3=30,08$			

Tabel 6.4 (lanjutan) *GCV* Minimum untuk Model Gabungan Dua Prediktor Spline *Truncated* dan Dua Prediktor Deret Fourier

No	Model Gabungan	Variabel Prediktor				<i>GCV</i>	R^2
		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Spline x_1, x_4	$t_1=1165,36$	$K=1$	$K=2$	$t_1=3,55$	1098288,92	95,28
	Deret Fourier x_2, x_3	$t_2=3301,27$			$t_2=7,19$		
		$t_3=4582,82$			$t_3=9,37$		
4	Spline x_2, x_3	$K=3$	$t_1=196,70$	$t_1=26,45$	$K=2$	1008096,06	95,82
	Deret Fourier x_1, x_4		$t_2=228,82$	$t_2=27,49$			
			$t_3=277,01$	$t_3=29,05$			
5	Spline x_2, x_4	$K=1$	$t_1=196,70$	$K=2$	$t_1=4,28$	983168,34	95,83
	Deret Fourier x_1, x_3		$t_2=228,82$		$t_2=5,74$		
			$t_3=277,01$		$t_3=7,92$		
6	Spline x_3, x_4	$K=1$	$K=2$	$t_1=25,26$	$t_1=2,60$	2600959,50	88,49
	Deret Fourier x_1, x_2			$t_2=29,53$	$t_2=8,60$		

Dari Tabel 6.4 diketahui bahwa model regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dengan dua prediktornya spline *truncated* dan dua prediktor yang lain merupakan deret fourier memiliki nilai *GCV* minimum 668466,45 dengan $R^2 = 97,22\%$.

6.4 Pemodelan Produksi Padi Menggunakan Deret Fourier

Berikut ini disajikan pemodelan regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier, dimana variabel prediktor x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan $K=1$, $K=2$ dan $K=3$.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^4 \left(b_j x_{ji} + \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos k \left(\frac{2\pi x_{ji}}{n} \right) \right) + \varepsilon_i \quad (6.1)$$

Model regresi nonparametrik multivariabel deret Fourier yang terbaik diperoleh dari nilai K optimal. Untuk mendapatkan nilai K optimal digunakan

metode *GCV*. Berikut ini ditampilkan hasil perhitungan *GCV* minimum model regresi nonparametrik multivariabel, dimana empat variabel prediktor deret Fourier dengan $K=1$, $K=2$ dan $K=3$. Nilai *GCV* minimum disajikan dalam Tabel 6.5.

Tabel 6.5 *GCV* Minimum Model Deret Fourier dengan Empat Prediktor Deret Fourier

Model Gabungan	Variabel Prediktor				<i>GCV</i>	R^2
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	$K=1$	$K=1$	$K=1$	$K=1$	123.130.311,1	85,67
2	$K=2$	$K=2$	$K=2$	$K=2$	47763211,0	90,89
3	$K=3$	$K=3$	$K=3$	$K=3$	24941012,6	92,02
4	$K=2$	$K=1$	$K=3$	$K=1$	38965423,7	91,58
5	$K=1$	$K=3$	$K=1$	$K=2$	94123456,3	88,67
6	$K=3$	$K=2$	$K=2$	$K=3$	45653212,4	90,37
7	$K=2$	$K=3$	$K=2$	$K=2$	93613731,3	91,08
8	$K=3$	$K=2$	$K=3$	$K=1$	39276832,7	91,21
9	$K=1$	$K=1$	$K=1$	$K=3$	94436380,5	87,70

Berpedoman pada Tabel 6.5 diketahui bahwa model regresi nonparametrik multivariabel deret fourier dengan empat variabel prediktor deret Fourier, mempunyai nilai *GCV* paling kecil adalah 24941012,60 dengan $R^2 = 92,02\%$.

6.5 Pemodelan Produksi Padi Menggunakan Spline *Truncated*

Berikut ini disajikan pemodelan regresi nonparametrik multivariabel spline *truncated*, dimana empat variabel prediktor x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan tiga titik knot $r=1, r=2$ dan $r=3$.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^4 \left(\beta_j x_{ji} + \sum_{u=1}^r \alpha_{uj} (x_{ji} - t_{uj})_+ \right) + \varepsilon_i \quad (6.2)$$

Model regresi nonparametrik multivariabel spline *truncated* yang terbaik diperoleh dari nilai titik knot yang optimal. Untuk mendapatkan nilai titik knot optimal digunakan metode *GCV*. Berikut ini ditampilkan hasil perhitungan *GCV* minimum model regresi nonparametrik multivariabel spline *truncated* dengan tiga titik knot $r=1, r=2$ dan $r=3$. Nilai *GCV* minimum disajikan dalam Tabel 6.6.

Tabel 6.6 *GCV Minimum Model Spline Truncated dengan Empat Prediktor Spline Truncated*

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV	R ²
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄		
1	t ₁ = 3925,62	t ₁ = 284,42	t ₁ = 29,28	t ₁ = 8,25	1520836,90	94,21
2	t ₁ = 3202,69	t ₁ = 257,24	t ₁ = 28,41	t ₁ = 7,02	1065552,50	96,59
	t ₂ = 4467,81	t ₂ = 304,81	t ₂ = 29,94	t ₂ = 9,18		
3	t ₁ = 1395,38	t ₁ = 189,28	t ₁ = 26,22	t ₁ = 3,95	932954,34	97,05
	t ₂ = 3202,69	t ₂ = 257,24	t ₂ = 28,41	t ₂ = 7,02		
	t ₃ = 4467,81	t ₃ = 304,81	t ₃ = 29,94	t ₃ = 9,18		
4	t ₁ = 3202,69	t ₁ = 181,63	t ₁ = 25,97	t ₁ = 7,02	1873124,94	91,31
		t ₂ = 269,98	t ₂ = 28,82			
5	t ₁ = 1165,36	t ₁ = 277,63	t ₁ = 29,07	t ₁ = 3,55	1098288,94	95,27
	t ₂ = 3301,27			t ₂ = 7,19		
				t ₃ = 9,37		
6	t ₁ = 3202,69	t ₁ = 196,69	t ₁ = 28,41	t ₁ = 4,28	985018,28	95,85
		t ₂ = 288,82		t ₂ = 5,74		
		t ₃ = 277,01				
7	t ₂ = 4467,81	t ₂ = 304,81	t ₂ = 29,94	t ₂ = 9,18	1158422,48	95,08
	t ₂ = 3301,27	t ₂ = 269,98	t ₂ = 28,53	t ₂ = 7,19		
	t ₃ = 4582,82		t ₃ = 30,08	t ₃ = 9,37		
8	t ₁ = 1165,36	t ₁ = 284,42	t ₁ = 25,94	t ₁ = 8,25	1158135,65	95,05
	t ₂ = 3301,27		t ₂ = 28,53			
			t ₃ = 30,08			
9	t ₁ = 1395,80	t ₁ = 189,20	t ₁ = 28,40	t ₁ = 7,00	882819,00	97,12
	t ₂ = 3202,69	t ₂ = 257,24	t ₂ = 29,94	t ₂ = 9,18		
	t ₃ = 4467,81	t ₃ = 304,81				

Berdasarkan pengamatan Tabel 6.6 diketahui bahwa model regresi nonparametrik multivariabel spline *truncated*, dengan empat variabel prediktor spline *truncated* mempunyai nilai *GCV* paling kecil adalah 882819,00 dengan $R^2 = 97,12\%$. Selanjutnya ditampilkan nilai *GCV* minimum model gabungan deret Fourier dan

spline *truncated* dengan dua prediktor Spline *truncated*, ke empat prediktor deret Fourier dan ke empat prediktor spline *truncated* disajikan dalam Tabel 6.7.

Tabel 6.7 GCV Minimum Model Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated*

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV	R ²
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄		
1	t ₁ = 1595,92	t ₁ = 196,70	K=1	K=1	668466,45	97,22
	t ₂ = 3301,30	t ₂ = 260,95				
	t ₃ = 4582,82	t ₃ = 309,11				
2	K=3	K=3	K=3	K=3	24941012,60	92,02
3	t ₁ = 1395,80	t ₁ = 189,20	t ₁ = 28,40	t ₁ = 7,00	882819,00	97,12
	t ₂ = 3202,69	t ₂ = 257,24	t ₂ = 29,94	t ₂ = 9,18		
	t ₃ = 4467,81	t ₃ = 304,81				

Berdasarkan pada Tabel 6.7 diketahui bahwa model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang prediktornya didekati dengan dua spline *truncated* dan dua deret Fourier, ke empat nya deret Fourier serta ke empatnya didekati dengan spline *truncated* mempunyai nilai GCV minimum 668466,45 dengan nilai $R^2 = 97,22\%$.

6.6 Pemilihan Model Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated* Terbaik

Berdasarkan kombinasi model-model yang telah dicobakan pada pembahasan sebelumnya, akan dipilih model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang terbaik dengan menggunakan nilai GCV yang terkecil. Tabel 6.8 menyajikan pemilihan model terbaik berdasarkan nilai GCV minimum.

Tabel 6.8 GCV Minimum Model Produksi Padi Terbaik

No	Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV	R ²
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄		
1	Deret Fourier x ₄	t ₁ =1592,55	t ₁ =196,69	t ₁ =26,45	K=1	685828,72	97,20
	Spline	t ₂ =3301,27	t ₂ =260,95	t ₂ =28,53			
	x ₁ , x ₂ , x ₃	t ₃ =4582,82	t ₃ =309,14	t ₃ =30,08			
2	Deret fourier x ₃ , x ₄	t ₁ =1595,92	t ₁ =196,69	K=1	K=1	668466,45	97,22
	Spline	t ₂ =3301,27	t ₂ =260,95				
	x ₁ , x ₂	t ₃ =4582,82	t ₃ =309,14				
3	Deret Fourier x ₁ , x ₃ , x ₄	K=3	t ₁ =196,99	K=2	K=1	977554,92	95,74
	Spline x ₂		t ₂ =228,82				
			t ₃ =277,01				
4	Spline x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄	t ₁ =1395.38	t ₁ =189.28	t ₁ =28.41	t ₁ =7.02	932954.34	97,12
		t ₂ =3202.69	t ₂ =257.24	t ₂ =29.94	t ₂ =9.18		
		t ₃ =4467.81	t ₃ =304.81				
5	Deret Fourier x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄	K=2	K=3	K=2	K=2	93613731,30	91,08

Mengacu pada Tabel 6.8 didapat model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* terbaik adalah model gabungan deret Fourier dengan $K=1$ untuk variabel prediktor x_3, x_4 dan spline *truncated* dengan tiga titik knot pada variabel prediktor x_1, x_2 . Nilai GCV minimum yang dihasilkan adalah 668466,65. Titik knot optimal yang diperoleh sebagai berikut: Pada variabel prediktor x_1 diperoleh titik knot:

$$t_{11} = 1592,55, \quad t_{12} = 3301,27 \quad \text{dan} \quad t_{13} = 4582,82$$

Pada variabel prediktor x_2 diperoleh titik knot:

$$t_{21} = 196,69, \quad t_{22} = 260,94 \quad \text{dan} \quad t_{23} = 309,13.$$

Berikut adalah model regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan Spline *truncated* terbaik untuk memodelkan produksi padi di Provinsi Bali.

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{11}x_{1i} + \hat{\alpha}_{11}(x_{1i} - t_{11})_+ + \hat{\alpha}_{12}(x_{1i} - t_{12})_+ + \hat{\alpha}_{13}(x_{1i} - t_{13})_+ + \hat{\beta}_{21}x_{2i} + \\ & \hat{\alpha}_{21}(x_{2i} - t_{21})_+ + \hat{\alpha}_{22}(x_{2i} - t_{22})_+ + \hat{\alpha}_{23}(x_{2i} - t_{23})_+ + \hat{b}_{11}x_{3i} + \frac{1}{2}\hat{a}_{01} + \\ & \hat{a}_{11} \cos\left(K \frac{2\pi x_{3i}}{n}\right) + \hat{b}_{21}x_{4i} + \frac{1}{2}\hat{a}_{02} + \hat{a}_{21} \cos\left(K \frac{2\pi x_{4i}}{n}\right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Tabel 6.9 menyajikan hasil estimasi parameter model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang terbaik.

Tabel 6.9 Estimasi Parameter Model Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated* Terbaik.

No	Variabel	Parameter	Nilai Estimasi
1	x_1	β_0	0,0000000001
		β_{11}	3,21
		α_{11}	3,31
		α_{12}	4,62
		α_{13}	-10,23
2	x_2	β_{21}	40,58
		α_{21}	-70,31
		α_{22}	100,38
		α_{23}	10,32
3	x_3	b_{11}	-200,52
		a_{01}	-30000,36
		a_{11}	-10000,67
4	x_4	b_{21}	1000,05
		a_{02}	30000,36
		a_{21}	-10000,67

Berdasarkan estimasi parameter pada Tabel 6.9 maka dapat ditulis model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* terbaik, untuk memodelkan produksi padi di Provinsi Bali sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\hat{y} = & 0,0000000001 + 3,21x_1 + 3,31(x_1 - 1592,55)_+ + 4,62(x_1 - 3301,27)_+ - \\ & 10,23(x_1 - 4582,82)_+ + 40,58x_2 - 70,31(x_2 - 196,69)_+ + \\ & 100,38(x_2 - 260,94)_+ + 10,32(x_2 - 309,13)_+ - 200,52x_3 - \\ & 30000,36 - 10000,67 \cos\left(\frac{2\pi x_3}{57}\right) + 1000,05x_4 + \\ & 30000,36 - 10000,67 \cos\left(\frac{2\pi x_4}{57}\right).\end{aligned}\quad (6.4)$$

Model regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang terbaik memiliki nilai determinasi $R^2 = 97,22\%$. Hal ini memiliki arti bahwa variasi-variasi produksi padi di provinsi Bali dapat dijelaskan oleh variabel-variabel prediktor luas panen (x_1), curah hujan (x_2), suhu udara (x_3) dan kecepatan angin (x_4) sebesar 97,22%.

6.7 Interpretasi Model Regresi Nonparametrik Multivariabel Gabungan Deret Fourier dan Spline *Truncated* Terbaik

Berdasarkan hasil analisis model regresi nonparametrik multivariabel gabungan deret Fourier dan spline *truncated* terbaik dengan $K=1$ dan tiga titik knot, pada persamaan (6.4). Model terbaik tersebut dapat diinterpretasikan sebagai berikut.

1. Apabila variabel x_2, x_3 dan x_4 dianggap konstan, maka besar pengaruh luas panen (x_1) terhadap produksi padi (y) adalah

$$\hat{y} = 0,0000000001 + 3,21x_1 + 3,31(x_1 - 1592,55)_+ + 4,62(x_1 - 3301,27)_+ - 10,23(x_1 - 4582,82)_+$$

$$= \begin{cases} 3,21x_1 & ; & x_1 < 1592,55 \\ 6,52x_1 + 5173,34 & ; & 1592,55 \leq x_1 < 3301,27 \\ 11,14x_1 + 6758,60 & ; & 3301,27 \leq x_1 < 4582,82 \\ 3,29x_1 + 12295,40 & ; & x_1 > 4582,82 \end{cases}$$

Dari model tersebut dapat diinterpretasikan, yaitu jika luas panen kurang dari 1592,55 ha dan luas panen naik 1ha, maka produksi padi akan naik 3,21 ton. Wilayah yang termasuk dalam interval ini adalah Kecamatan Baturiti, Kediri, Kerambitan, Marga, Penebel, Pupuan, Selemadeg, Selemadeg Barat, Selemadeg Timur, Tabanan, Jemberana, Melaya, Mendoyo, Negara, Pekutatan, Denpasar Barat, Denpasar Selatan, Denpasar Utara, Denpasar Timur, Ubud, Tegalalang, Bangli, Kintamani, Banjar Rangkan, Klungkung, Nusa Penida, Bebandem dan Kubu. Wilayah Kecamatan ini mempunyai tingkat kesuburan tanah yang kurang karena berada pada wilayah pesisir pantai dan wilayah pegunungan. Selanjutnya jika luas panen berkisar antara 1592,55 ha hingga 3301,27 ha dan luas panen naik 1 ha, maka produksi padi akan cenderung naik sebesar 6,52 ton. Wilayah yang termasuk dalam interval ini adalah Kecamatan Tejakula, Sukawati, Blahbatuh, Gianyar, Tampak siring, Susut, Tembuku, Abang, Karangasem, Manggis, Rendang dan Selat. Wilayah Kecamatan ini mempunyai tingkat kesuburan tanahnya cukup bagus, karena wilayah ini agak jauh dari pantai dan gunung. Selanjutnya jika luas panen berkisar antara 3301,27 ha hingga 4582,82 ha dan luas panen naik 1 ha, maka produksi padi akan naik sebesar 11,14 ton. Wilayah yang termasuk interval ini adalah Kecamatan Sidemen, Payangan, Kuta selatan, Kuta, Kuta utara, Sukasada, Seririt, Kubu Tambahan, Grokgak, Busung Bui, Buleleng dan Banjar. Wilayah Kecamatan ini mempunyai tingkat kesuburan tanahnya sangat bagus. Selanjutnya jika luas panen lebih dari 4582,82 ha dan apabila luas panen naik 1ha, maka produksi padi akan naik sebesar 3,29 ton. Wilayah yang termasuk interval ini adalah Kecamatan Mengwi, Abiansemal dan Petang. Wilayah Kecamatan ini mempunyai tingkat kesuburan tanahnya kurang.

2. Apabila x_1, x_3 dan x_4 dianggap konstan, maka besar pengaruh rata rata curah hujan (x_2) terhadap rata rata produksi padi (y) adalah

$$\hat{y} = 40,58x_2 - 70,31(x_2 - 196,69)_+ + 100,38(x_2 - 260,94)_+ + 10,32(x_2 - 309,13)_+$$

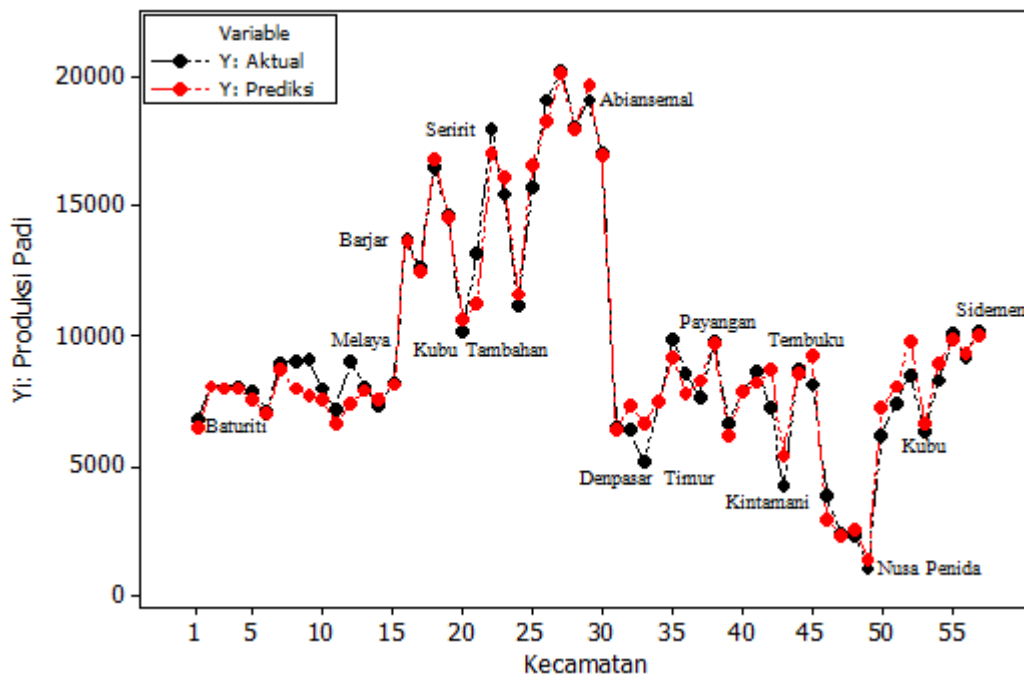
$$= \begin{cases} 40,58x_2; & x_2 < 196,69 \\ -29,74x_2 + 1437,80; & 196,69 \leq x_2 < 260,94 \\ 70,64x_2 + 1077,71; & 260,94 \leq x_2 < 309,13 \\ -80,96x_2 + 665,66; & x_2 > 309,13 \end{cases}$$

Dari model tersebut dapat diinterpretasikan, yaitu jika curah hujan kurang dari 196,69 mm dan curah hujan naik 1 mm, maka produksi padi akan naik sebesar 40,58 ton. Wilayah yang termasuk interval ini adalah Kecamatan Baturiti, Penebel, Pupuan, Jemberana, Melaya, Mendoyo, Negara, Pekutatan, Denpasar Timur, Gianyar, Payangan, Ubud, Tampak Siring, Susut, Banjar Rangkan, Dawan, Klungkung, Nusa Penida, Kubu dan Manggis. Selanjutnya curah hujan berkisar antara 196,69 mm hingga 260,94 mm dan curah hujan naik 1 mm, maka produksi padi akan cenderung turun sebesar 29,74 ton. Wilayah yang termasuk interval ini adalah Kecamatan Rendang, Abang, Tembuku, Kintamani, Tegalalang, Blahbatuh, Denpasar Utara, Denpasar Selatan, Kubu Tambahan, Tabanan, Selemadeg Timur, Selemadeg, Marga, Kerambitan dan Kediri. Wilayah Kecamatan ini terjadi gagal panen karena tanaman padi diserang hama tikus dan curah hujan tidak begitu bagus. Selanjutnya curah hujan berkisar antara 260,94 mm hingga 309,13 mm dan curah hujan naik 1 mm, maka produksi padi akan cenderung naik sebesar 70,64 ton. Wilayah yang termasuk interval ini adalah Kecamatan Selemadeg Barat, Banjar, Buleleng, Busung Biu, Grogak, Seririt, Sukasada, Tejakula, Sawan, Sukawati, Bangli, Bebandem, Karangasem, Selat dan Sidemen. Selanjutnya jika curah hujan lebih dari 309,13 mm dan curah hujan naik sebesar 1 mm, maka produksi padi akan cenderung turun sebesar 80,96 ton. Wilayah yang termasuk interval ini adalah Kecamatan Petang, Abiansemal, Wilayah Kecamatan ini mempunyai curah hujan tinggi, tanaman padi cepat

busuk sehingga terjadi gagal panen. Berikut ini diberikan prediksi produksi padi \hat{y} untuk masing-masing Kecamatan di Provinsi Bali yang dibandingkan dengan produksi padi aktual y . Nilai prediksi produksi padi \hat{y} dan produksi padi aktual y masing-masing disajikan dalam Tabel 6.10 dan Gambar 6.5.

Tabel 6.10 Produksi Padi Aktual y dengan Prediksi Produksi Padi \hat{y}

No	Kecamatan	y	\hat{y}	No	Kecamatan	y	\hat{y}
1	Baturiti	6823	6541.69	30	Petang	17105	16968.1
2	Kediri	8123	8069.39	31	Denpasar Barat	6479	6399.64
3	Kerambitan	8053	8021.11	32	Denpasar Selatan	6398	7354.59
4	Marga	8114	8003.15	33	Denpasar Timur	5202	6680.21
5	Penebel	7900	7535.69	34	Denpasar Utara	7521	7456.82
6	Pupuan	7132	7019.21	35	Sukawati	9941	9252.79
7	Selemadeg	9009	8801.76	36	Blahbatuh	8621	7805.85
8	Selemadeg Barat	9110	7986.17	37	Gianyar	7656	8291.95
9	Selemadeg Timur	9125	7689.09	38	Payangan	9862	9765.1
10	Tabanan	8050	7585.91	39	Ubud	6692	6201.07
11	Jembrana	7214	6629.69	40	Tampak Siring	7863	7887.47
12	Melaya	9050	7433.62	41	Tegalalang	8672	8234.83
13	Mendoyo	8121	7923.62	42	Bangli	7268	8742.48
14	Negara	7351	7589.58	43	Kintamani	4212	5475.46
15	Pekutatan	8235	8193.52	44	Susut	8768	8605.51
16	Banjar	13745	13696.1	45	Tembuku	8152	9277.38
17	Buleleng	12675	12541.3	46	Banjar Kangan	3886	2961.51
18	Busung Bui	16561	16869.1	47	Dawan	2465	2379.4
19	Grogak	14650	14552.6	48	Klungkung	2337	2606.19
20	Kubu Tambahan	10212	10679.2	49	Nusa Penida	1080	1458.8
21	Sawan	13256	11265.8	50	Abang	6213	7272.29
22	Seririt	17991	17104.6	51	Bebandem	7421	8079.72
23	Sukasada	15521	16192.1	52	Karangasem	8533	9813.91
24	Tejakula	11200	11604.5	53	Kubu	6345	6634.93
25	Kuta Utara	15770	16609.8	54	Manggis	8341	9000.6
26	Kuta	19121	18263.4	55	Rendang	10145	9872.08
27	Kuta Selatan	20212	20176	56	Selat	9231	9351.62
28	Mengwi	18061	17953.5	57	Sidemen	10241	10075.4
29	Abiansema	19121	19719.2				



Gambar 6.5 Produksi Padi Aktual (y) dan Produksi Padi Prediksi (\hat{y})

Berdasarkan Tabel 6.10 dan Gambar 6.5 terlihat bahwa nilai prediksi produksi padi (\hat{y}) dengan produksi padi aktual (y) relatif cukup dekat untuk masing-masing kecamatan yang ada di Provinsi Bali. Disamping itu model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* mempunyai koefisien determinasi yang relatif besar yaitu $R^2=97,22\%$. Hal ini menunjukkan bahwa model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* terbaik sangat sesuai untuk digunakan dalam memodelkan produksi padi di Provinsi Bali. Penggunaan model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik disesuaikan dengan variabel yang terkandung dalam model baik respon maupun prediktor. Produksi padi yang merupakan respon dalam model sangat berpengaruh pada luas panen. Hal ini menunjukkan bahwa ada kecenderungan makin meningkatnya luas panen, produksi padi juga ikut meningkat. Peningkatan luas panen tidak dapat dipisahkan dari luas lahan yang ada di provinsi Bali. Kebijakan Pemerintah Provinsi Bali untuk meningkatkan produksi padi harus

membuka lahan baru yang bisa dijadikan lahan pertanian. Disamping itu pula Pemerintah Provinsi Bali menghimbau kepada masyarakat untuk tidak mengalih fungsikan lahan pertanian yang selama ini dijadikan pemukiman dan hotel, demi untuk peningkatan produksi padi. Selain luas panen faktor yang berpengaruh dan memberikan kontribusi dalam peningkatan produksi adalah curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Kebijakan Pemerintah Provinsi Bali harus rutin memberikan penyuluhan kepada petani, bahwa dalam sistem panen padi agar memperhatikan faktor iklim yang menyangkut curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Diharapkan melalui penyuluhan ini, petani Bali khususnya organisasi subak untuk memahami dan mengerti tentang pola tanam terutama menyangkut iklim yang berdampak pada tanaman padi. Iklim yang dimaksud adalah dengan memperhatikan besarnya curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Sehingga, produksi padi dapat meningkat secara signifikan. Dalam penelitian ini, produksi padi meningkat secara signifikan dapat dilihat dari besarnya curah hujan antara 150-200 mm, suhu udara berkisar antara 25⁰- 29⁰C dan kecepatan angin 2-4 knot. Selama ini pola tanam yang dilakukan oleh petani di Bali dalam 1 tahun 3 kali berturut-turt menanam padi. Kebijakan lain yang dapat dipertimbangkan yaitu melakukan pola tanam dalam 1 tahun sebanyak 3 kali, dengan variasi 2 kali menanam padi dan 1 kali menanam palawija.

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

BAB 7

KESIMPULAN, SARAN DAN KEBERLANJUTAN

7.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel diberikan oleh :

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \hat{f}_1(x_1) + \sum_{j=2}^p \hat{f}_j(x_j),$$

dengan

$$\hat{f}_1(x_1) = \hat{b}x_1 + \frac{1}{2}\hat{a}_0 + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k \cos k\pi x_1,$$

dan

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{v=1}^m \hat{\beta}_{vj} x_j^v + \sum_{u=1}^r \hat{\alpha}_{uj} (x_j - t_{uj})_+^m, \quad j = 2, 3, \dots, p.$$

Estimator $\hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_k, \hat{\beta}_{vj}, \hat{\alpha}_{uj}$, dengan $k = 1, 2, \dots, K, u = 1, 2, \dots, r, v = 1, 2, \dots, m$ dan

$j = 2, 3, \dots, p$ diperoleh dari persamaan:

$$\hat{\mathbf{a}}(K, \mathbf{t}, \lambda) = (\hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_K)' = A(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}, \text{ dimana}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(K, \mathbf{t}, \lambda) &= (\hat{\beta}_{11}, \dots, \hat{\beta}_{m2}, \hat{\alpha}_{12}, \dots, \hat{\alpha}_{r2}, \dots, \hat{\beta}_{1p}, \dots, \hat{\beta}_{mp}, \hat{\alpha}_{1p}, \dots, \hat{\alpha}_{rp})' = B(K, \mathbf{t}, \lambda) \mathbf{y}, \\ A(K, \mathbf{t}, \lambda) &= \left(S(K, \lambda) \mathbf{W} \mathbf{I} - S(K, \lambda) \mathbf{W} \mathbf{X} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W} \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}') \right), \\ B(K, \mathbf{t}, \lambda) &= \left(\mathbf{I} - (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}' S(K, \lambda) \mathbf{W} \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{W} S(K, \lambda) \mathbf{W}'). \end{aligned}$$

2. Untuk memilih parameter osilasi K parameter penghalus λ dan titik-titik knot optimal dapat menggunakan metode *GCV*. Parameter osilasi K dan parameter

penghalus λ serta titik knot optimal diperoleh dari meminimumkan fungsi $V(K, \mathbf{t}, \lambda)$, yaitu dengan menyelesaikan optimasi:

$$V(\mathbf{t}_{\text{optimal}}, \lambda_{\text{optimal}}, K_{\text{optimal}}) = \underset{\{\mathbf{t}, 0 < \lambda < \infty\}}{\text{Min}} \left\{ \frac{n^{-1} \mathbf{y}' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))' (\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda)) \mathbf{y}}{[n^{-1} \text{trace}(\mathbf{I} - C(K, \mathbf{t}, \lambda))]^2} \right\}.$$

3. Berdasarkan hasil kajian simulasi diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Apabila ukuran sampel n semakin besar, maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* semakin baik. Jika varians σ^2 semakin kecil, maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* semakin baik. Jika titik knot yang digunakan semakin banyak, maka ada kecenderungan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated* semakin baik. Walaupun demikian titik knot yang terlalu banyak juga akan menghasilkan model yang sangat kompleks, sehingga perlu dipilih titik knot optimal. Jika parameter osilas iK semakin banyak, maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* tidak semakin baik. Oleh karena itu perlu dilakukan pemilihan parameter osilasi K yang optimal. Jika parameter penghalus sangat besar ($\lambda \rightarrow \infty$), maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat *smooth* (global). Sebaliknya apabila parameter penghalus sangat kecil ($\lambda \rightarrow 0$), maka estimator model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* sangat kasar (local). Untuk mendapatkan model terbaik perlu dipilih parameter penghalus optimal.

4. Berdasarkan hasil kajian terapan pada produksi padi di Provinsi Bali, diperoleh model terbaik dengan nilai $R^2 = 97,22\%$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 0,0000000001 + 3,21x_1 - 3,31(x_1 - 1592,55)_+ + 4,62(x_1 - 3301,27)_+ - \\ & 10,23(x_1 - 4582,82)_+ + 40,58x_2 - 70,31(x_2 - 196,69)_+ + \\ & 100,38(x_2 - 260,94)_+ + 10,32(x_2 - 309,13)_+ - 200,52x_3 - \\ & 30000,36 - 10000,67 \cos\left(\frac{2\pi x_3}{n}\right) + 1000,05x_4 - \end{aligned}$$

$$30000,36 + 10000,77 \cos\left(\frac{2\pi x_4}{n}\right).$$

Hal ini menunjukkan bahwa model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* terbaik sangat sesuai untuk digunakan dalam memodelkan produksi padi di Provinsi Bali. Dalam penelitian ini, produksi padi meningkat secara signifikan dapat dilihat dari besarnya curah hujan antara 150-200 mm, suhu udara berkisar antara 25⁰-29⁰C dan kecepatan angin 2-4 knot. Kebijakan lainnya yang dapat dipertimbangkan yaitu melakukan pola tanam dalam 1 tahun sebanyak 3 kali, dengan rincian 2 kali menanam padi dan 1 kali menanam palawija.

7.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis dan kesimpulan yang diperoleh dalam disertasi, ada beberapa hal yang disarankan sebagai berikut:

1. Dalam penelitian ini model gabungan yang digunakan adalah antara deret Fourier dan spline *truncated*. Untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan estimator campuran yang lain, misalny acampuran wavelet dengan spline *smoothing*, wavelet dengan kernel atau yang lainnya.
2. Dalam penelitian ini variabel-variabel yang berpengaruh terhadap produksi padi luas panen, curah hujan, suhu udara dan kecepatan angin. Untuk penelitian selanjutnya disarankan memilih variabel yang lain, misalnya alih fungsi lahan, pupuk dan tenaga kerja. Dengan demikian diharapkan memperoleh hasil produksi padi yang optimal.

7.3 Keberlanjutan

Berdasarkan hasil yang diperoleh serta keterbatasan penelitian ini, maka masih dimungkinkan untuk mengembangkan beberapa hal terkait pemodelan regresi nonparametric multivariabel menggunakan estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*. Sebagai tindak lanjut dari penelitian ini diantaranya:

1. Model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang dikembangkan dalam penelitian ini menggunakan deret Fourier dengan trend, sehingga untuk penelitian berikutnya dapat dikembangkan untuk model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* non trend.
2. Kajian teori dalam disertasi ini masih terbatas pada bentuk estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*, sehingga perlu penelitian lanjutan untuk mengkaji inferensi statistik misalnya pengujian hipotesis untuk parameter-parameter model, penentuan statistik uji, sifat asimtotis dan interval konfidensi estimator gabungan deret Fourier dan spline *truncated*.
3. Model gabungan deret Fourier dan spline *truncated* yang dikembangkan dalam penelitian ini masih terbatas pada data *cross section*, sehingga untuk penelitian berikutnya dapat dikembangkan pada data longitudinal.

DAFTAR PUSTAKA

- Amato,U., De Feis, I., 2000, Smoothing Data with Correlated Noise Via FourierTransform, *Mathematics and Computers in Simulation*, 52(2000) 175-196.
- Amato,U., Antoniadis, A., De Feis, I., 2002, Fourier Series Approximation of Separable Models, *Journal of Computational and Applied Mathematics*,146 459-479.
- Amato,U., and De-Canditiis, D., 2001, Convergence in Probability of the Mallows and GCV Wavelet and Fourier Regularization Methods, *Statistics & Probability Letters*, 54, 325-329.
- Aneiros-Perez, G., and Vilar-Fernandes, J. M., 2008, Local Polynomial Estimation in Partial Linear Regression Models Under Dependence, *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, 2757-2777.
- Angelini, C., De-Canditiis, D., and Leblanc, F., 2003, Wavelet Regression Estimation in Nonparametric Mixed Effect Models, *Journal of Multivariate Analysis*, 85,267-291.
- Antoniadis, A., Bigot, J. and Spatinas, T., 2001, Wavelet Estimators in Nonparametric Regression : A Comparative Simulation Study, *Journal of Statistical Software*, 6, 1-83.
- Bilodeau, M., 1992, Fourier Smoother and Additive Models, *The Canadian Journal of Statistics*, 3, 257-269.
- Budiantara, I. N., 2000, Estimator Spline Dalam Regresi nonparametrik dan semiparametrik, Disertasi Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.
- Budiantara, I. N., 2007, Inferensi Statistik untuk Model Spline, *Jurnal Mat-Stat*, 7, 1-14.
- Budiantara, I. N., Lestari, B., dan Islamiyati, A., 2010, *Estimator Spline Terbobot Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik Heteroskedastik Untuk Data Longitudinal*.Laporan Penelitian Hibah Kompetensi, DP2M-DIKTI, Jakarta.

- Cheng, M. Y., Paige, R. L., Sun, S., and Yan, K., 2010, Variance Reduction for Kernel Estimations in Clustered/Longitudinal Data Analysis, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140, 1389-1397.
- Craven, P. and Wahba, G., 1979, Smoothing Noise Data with Spline Functions, *Numerische Mathematics*, 31, 377-403.
- De Canditiis, D., De Feis, I., 2004, Pointwise Convergence of Fourier Regularization for Smoothing Data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 196, 540-552.
- De Jong, P., 1977, The Fast Fourier Transform Spectral Estimator, *Journal of Statistical Soc. B* 39, No. 3, 327-330.
- Eubank, R.L., 1988, *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Marcel Dekker, New York.
- Eubank, R.L., Hart, J.D., and Speckman, P., 1990, Trigonometric Series Regression Estimators with an Application to Partially Linear Models, *Journal of Multivariate Analysis*, 32, 70-83.
- Faber, D., Douglas, C. Yoon, Susan K. Service and Stuart C. White., 2004, Fourier and Wavelet Analyses of Dental Radiographs Detect Trabecular Changes in Osteoporosis, *Los Angeles, CA* 90095-1668.
- Firmansyah, 2011, *Hubungan Penguasaan Lahan Sawah dengan Pendapatan Usahatani Padi*, Institut Pertanian Bogor (IPB) Bogor Agricultural University.
- Galtchouk, L., and Pergamenshchikov, S., 2009, Adaptive Asymptotically Efficient Estimation in Heteroscedastic Nonparametric Regression, *Journal of the Korean Statistical Society*, 38, 305-322.
- Green, P.J. and Silverman, B.W. 1994, *Nonparametric Regression and Generalized Linear Model*, Chapman & Hall, London.
- Hardle, W., 1990, *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, New York.
- Hastie, T.J., and Tibshirani, R.J., 1990, *Generalized Additive Models*. Departemen of Preventive Medicine and Biostatistics and Department of Statistics, University of Toronto, Chapman and Hall, London.

- He, H., and Huang, L., 2009, Double-smoothing for Bias Reduction in Local Linear Regression, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 1056-1072.
- Kayri, M., and Zirrhoglu, G., 2009, Kernel Smoothing Function and Choosing Bandwidth for Nonparametric Regression Methods, *Ozean Journal of Applied Sciences*, 2, 49-60.
- Kinukaw, M., 1994, Inequalities Related to Smoothness Conditions and Fourier Series, *Periodica Mathematica Hungarica*, Vol. 29(1), pp 51-56.
- Kohn, R., 1991, The Performance of Cross Validation and Maximum Likelihood Estimator of Spline Smoothing Parameter, *Journal of The American Statistics Assosiations*, 86: 1042-1050.
- Li, K., 1986. Asymtotic Optimality of CL and Generalized Cross Validation in Ridge Regression With Application to Spline Smoothing, *Ann, Statistics*, 14:1101-1112.
- Li, L., 2002. *Nonlinear Waveled-Based Nonparametric Curve Estimation with Consored Data and Inference on Long Memory Processes*, ProQuest Information and Learning Company, United States Code.
- Liang, H., 2006, *Estimation in Partially Linear Models and Numerical Comparisons*, *Computational Statistics and Data Analysis*, 50, 675-687.
- Lin, Y dan Zhang, H. H., 2006, Component Selection and Smoothing in Multivariate Nonparametric Regression, *The Annals of Statistic*, 34, 2272-2297.
- Mahler, 1995, Variational Solution of penalized Likelihood Problem and Smoth Curve, *Annal of Statistic*, 23: 1496-1517.
- Manzana, S. dan Zerom, D., 2005, Kernel Estimation of a Partially Linear Additive Model, *Statistics & Probability Letters*, 72, 313-322.
- Martins-Fihlo, C. dan Yao, F., 2009, Nonparametrik Regressions Estimation With General Parametric Error Covariance, *Journal of Multivariate Ann Lysis*, 100, 309-333.
- Morton, J., Silverberg, L., 2009, Fourier Series of Half-Range Functions by Smooth Extension, *Applied Mathematical Modelling*, 33(2009) 812-821.
- Nadaraya, E.A , 1964, On Estimating regression. *Theory of Probability and its Applications* 9 (1) : 141+2. Doi. 10.113781109020.

- Prabandari A.C., Made Sudarma, Putu Udayani Wijayanti., 2013, Analisis Faktor factor yang Mempengaruhi Produksi Padi Sawah pada Daerah Tengah dan Hilir Aliran Sungai Ayung (Studi Kasus Subak Mambal, Kabupaten Badung dan Subak Pagutan, Kota Denpasar) E-Jurnal Agrobisnis dan Agrowisata ISSN:2301-6523 Vol.2, No.3, Juli 2013.
- Okumura, H dan Naito, K., 2006, Non-parametric Kernel Regression for Multinomial Data, *Journal of Multivariate Analysis*, 97, 2009-2022.
- Qingguo, T., 2010. Li-Estimation in a Semiparametric Model with Longitudinal Data, *Journal of Statistic Planning and Inference*, 140, 393-405.
- Qu, L., 2003. *On Semiparametric Regression via Wavelets*. PreQuest Information and Learning Company. United State.
- Oirrak, A. E., Daoudi, M., Aboutajdine, D., 2002, Affine Invariant Descriptors using Fourier Series, *Pattern Recognition Letters*, 23 1109-1118.
- Rakotomamonjy, A., Mary, X. and Canu, S (2005), Nonparametric resression with wavelet kernels. *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.*, 21 : 153-163, doi : 10.1002/asmb.533.
- Rencher, A., and Schaalje, G.B. 2008, *Linear Model in Statistics 2nd Edition*, John Willy and Sons Inc., New Jersey.
- Shao, 1983, Linear Models Selection by Cross Validation, *Journal of the American Association.*, 88: 486-494.
- Searly, S.R. (1971), *Linear Model*, John Willy and Sons Inc., New York.
- Silverberg, J., and Morton, J., 2007, Fourier Series of Half-range Functions by Smooth Extension, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, 33, 812-821.
- Sua, L., and Ullah, A., 2008, Local Polynomial Estimation of Nonparametric simultaneous Equations Models, *Journal of Ecnpmetrics*, 144, 193-218.
- Taylor, L., W. 2009, Using the Haar Wavelet Transform in the Semiparametric Speciofication of Time Series, *Economic Modelling*, 26, 392-403.
- Tripena, A. and Budiantara, I N., 2007, *Fourier Estimator in Nonparametric Regression*, International Conference On Natural Sciences and Applied Natural Scienes, Ahmad Dahlan University, Yogyakarta.

- Venter, J.H., and Snyman, J.L.J., 1985, A Note on the Generalized Cross Validation Criterion in Linear Model Selection, *Biometrics*, 82, 215-219.
- Wahba G., 1985, A Comparison of GCV and GML for Choosing The Smoothing Parameter in Generalized Spline Smoothing Problem, *Annals of Statistics*, 13, 1378-1402.
- Wahba G., 1990, *Spline Models For Observation Data*, SIAM Pennsylvania.
- Watson, G.S. 1964, Smooth regression analysis. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Series A* 26 (4), 359-372 JSTOR 25049340.
- Welsh, A. H. and Yee, T. W., 2006, Local Regression for Vector Responses. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 3007 – 3031.
- Wood, S. N., 2006, On Confidence Intervals for Generalized Additive Models Based on Penalized Regression Spline, *Aus. N. Z. J. Stat.*, 48, 445-464.
- Wu, H. Zhang, J-T., 2006, *Nonparametric Regression Methods for Longitudinal Data Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. Hoboken, 37, 673-696.
- Yao, F., 2007, Asymptotic Distribution of Nonparametric Regression Estimators for Longitudinal or Functional Data, *Journal of Multivariate Analysis*, 98, 40-56.
- You, J and Zhou, X., 2009, Partially Linear Models and Polynomial Spline Approximations for the Analysis of Unbalanced Panel Data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 679-695.
- You J., Chen, G., 2007, Semiparametric Generalized Least Squares Estimation in Partially Linear Regression Models with Correlated Errors. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 117 – 132.
- You J., Chen, G., and Zhou, X., 2005, β -Spline Estimation in a Semiparametric Regression Model with Nonlinear Time Series Errors. *American Journal of Applied Sciences*, 2 (9), 1343-1349.
- You, J., Zhou, X., and Zhou, Y., 2010, Statistical Inference for Panel Data Semiparametric Partially Linear Regression Models with Heteroscedastic Errors, *Journals of Multivariate Analysis*, 101, 1079-1101.

(...Halaman Ini Sengaja Dikosongkan...)

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Hasil Simulasi

Data hasil simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} = 1$

No	y	x1	x2
1	3.167271	29	0.782402
2	6.897006	65	0.543425
3	4.843757	49	0.198299
4	2.965964	36	0.976856
5	7.650484	71	0.151992
6	3.978265	38	0.219615
7	1.798485	7	0.136887
8	6.379426	61	0.852921
9	4.797529	47	0.920252
10	3.292227	19	0.280511
11	1.399111	2	0.765259
12	4.098747	21	0.267499
13	11.47206	95	0.283149
14	3.854085	34	0.100998
15	3.337151	4	0.548374
16	8.624761	78	0.03775
17	2.471706	14	0.275897
18	2.400559	13	0.241243
19	5.690134	52	0.290268
20	10.17383	88	0.875638
21	11.29324	99	0.857829
22	7.389377	74	0.991537
23	5.183212	55	0.878264
24	3.70507	24	0.555234
25	10.92271	91	0.023916
26	7.018721	67	0.388576
27	3.673034	25	0.264953
28	2.422141	5	0.304106
29	10.94657	94	0.831132
30	6.479567	58	0.595461
31	3.36832	22	0.633856
32	2.625886	3	0.35632
33	9.652992	77	0.494803
34	8.018382	70	0.514025
35	9.136461	81	0.268579
36	4.020997	35	0.449388
37	3.937879	40	0.684355

No	y	x1	x2
38	3.061879	16	0.182427
39	3.887227	20	0.259542
40	6.829755	64	0.434952
41	2.992866	11	0.667629
42	8.689147	79	0.982969
43	12.33662	100	0.231446
44	3.3086	23	0.085611
45	3.267672	12	0.560677
46	3.437756	28	0.79658
47	5.31621	60	0.913788
48	9.899788	83	0.752093
49	2.666937	10	0.878033
50	3.37265	15	0.091533
51	5.061908	50	0.788375
52	11.01322	92	0.71469
53	4.99021	39	0.457308
54	2.380554	9	0.191166
55	9.794059	85	0.198118
56	8.039703	73	0.550026
57	10.54684	90	0.632956
58	2.966069	32	0.952932
59	3.168985	31	0.849439
60	2.054494	1	0.379309
61	3.20456	30	0.72548
62	3.760805	45	0.915194
63	6.833974	66	0.130678
64	5.146163	48	0.241744
65	4.643675	46	0.223391
66	5.218782	59	0.93196
67	5.642538	57	0.946207
68	9.855951	89	0.913563
69	10.1671	87	0.756069
70	3.624118	27	0.561927
71	9.941111	82	0.042852
72	12.02333	97	0.515175
73	6.969545	68	0.666545
74	9.66737	84	0.120542

No	Y	x1	x2
75	3.801308	33	0.435283
76	10.38429	86	0.444327
77	5.844382	56	0.245477
78	5.944327	53	0.478084
79	1.658287	6	0.8655
80	2.60467	8	0.207794
81	3.226899	26	0.677335
82	9.040962	76	0.499393
83	6.358076	62	0.290106
84	8.942143	80	0.00302
85	3.320291	37	0.05357
86	4.373227	41	0.108942
87	7.516131	69	0.152081

No	y	x1	x2
88	11.21817	96	0.329232
89	4.654053	51	0.80439
90	6.438461	54	0.571242
91	8.081553	72	0.126522
92	5.010113	44	0.745921
93	1.99394	17	0.854007
94	3.350128	43	0.944629
95	4.687389	42	0.503021
96	11.09523	93	0.640882
97	11.72659	98	0.326815
98	6.93337	63	0.726964
99	3.772397	18	0.577689
100	8.670502	75	0.300525

Data hasil simulasi untuk n = 100, varians = 0.01, k=1, knot =2

No	Y	x1	x2
1	2.734014	7	0.37601
2	2.395646	11	0.466007
3	7.638187	69	0.885829
4	10.48702	86	0.34224
5	4.215691	41	0.168562
6	6.835427	65	0.301052
7	2.516168	2	0.378444
8	4.048845	26	0.360816
9	6.033077	55	0.469663
10	9.715782	82	0.035114
11	9.050052	78	0.275555
12	2.876286	22	0.692625
13	10.76906	93	0.715447
14	8.490295	77	0.86035
15	2.309345	10	0.956821
16	10.93503	91	0.532544
17	5.630786	54	0.3174
18	3.638322	19	0.352532
19	10.18353	85	0.413959
20	5.929172	56	0.356177
21	10.84061	99	0.632249
22	4.456706	35	0.879353
No	Y	x1	x2

No	y	x1	x2
23	10.10876	81	0.409995
24	12.1565	100	0.937732
25	6.796046	60	0.300152
26	2.309315	18	0.647086
27	6.047873	59	0.591539
28	2.093681	3	0.116955
29	4.013507	46	0.147803
30	4.031005	40	0.048008
31	3.010388	9	0.45139
32	3.559333	27	0.304701
33	11.60753	98	0.93346
34	5.522902	58	0.603583
35	3.250969	33	0.106491
36	10.60392	92	0.665834
37	4.863052	48	0.769771
38	5.119921	57	0.591045
39	4.713921	47	0.721551
40	2.546851	13	0.496414
41	5.706414	61	0.94306
42	3.168473	37	0.620335
43	9.136871	80	0.286497
44	4.873699	52	0.25377
No	y	x1	x2
45	9.789993	88	0.57293

46	3.805164	28	0.235762
47	7.680137	70	0.876149
48	7.713703	72	0.634544
49	3.75698	38	0.518124
50	3.261567	31	0.855108
51	8.175262	73	0.995211
52	2.586781	29	0.53056
53	11.18715	94	0.346215
54	4.683199	44	0.211231
55	6.072726	62	0.787617
56	8.850846	84	0.890706
57	3.63189	34	0.209911
58	9.985303	87	0.911993
59	2.60816	16	0.27793
60	1.176128	1	0.079419
61	8.576405	75	0.288414
62	3.757169	39	0.103856
63	4.040306	24	0.43318
64	8.808879	79	0.97442
65	2.982517	23	0.614319
66	11.28606	95	0.234564
67	7.227914	68	0.957123
68	2.28543	15	0.506018
69	7.065407	64	0.151573
70	1.824365	4	0.582098
71	2.367231	14	0.059933
72	5.097808	50	0.967811
No	y	x1	x2

73	4.03698	42	0.185376
74	4.673909	36	0.822692
75	4.796161	43	0.508649
76	5.804948	51	0.352783
77	2.2434	6	0.475331
78	10.73095	89	0.176173
79	8.121645	74	0.144468
80	5.728962	63	0.106965
81	2.477651	8	0.978708
82	10.78397	96	0.514603
83	3.349708	20	0.237148
84	7.032745	66	0.12965
85	4.416463	45	0.992232
86	9.08329	83	0.943633
87	2.412939	17	0.782136
88	5.255187	53	0.891883
89	2.503214	12	0.218907
90	11.11821	97	0.038876
91	7.986457	71	0.137808
92	6.668421	67	0.828295
93	10.65139	90	0.734167
94	8.355692	76	0.571046
95	3.624712	32	0.821356
96	2.162729	5	0.072406
97	4.329523	49	0.607326
98	3.674515	30	0.53793
99	3.184487	21	0.04931
100	3.835318	25	0.610935

Data hasil simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} = 3$

No	y	x1	x2
1	4.126218	36	0.361431
2	3.030666	30	0.052596
3	8.581087	80	0.582334
4	6.816405	70	0.085843
5	11.17013	95	0.110723
6	2.666908	23	0.835888
7	2.513439	15	0.685051
No	y	x1	x2
8	4.435712	49	0.649165

9	9.771311	83	0.790623
10	4.522595	48	0.164351
11	10.64989	90	0.386518
12	2.033438	6	0.002395
13	3.908189	41	0.830673
14	2.138669	5	0.18466
No	y	x1	x2
15	10.52659	94	0.932706
16	2.694615	25	0.998834
17	5.082853	52	0.055007

18	11.2662	98	0.351668
19	7.366643	72	0.188671
20	7.451182	66	0.248891
21	10.92866	96	0.852749
22	2.554286	7	0.719839
23	4.083457	39	0.37998
24	9.697599	84	0.501752
25	6.165951	63	0.422355
26	3.36464	37	0.253784
27	2.156636	2	0.793331
28	4.267901	45	0.572963
29	11.52908	99	0.260027
30	2.028057	8	0.414694
31	10.74386	97	0.792354
32	10.78993	92	0.64026
33	5.677853	60	0.525397
34	5.930922	58	0.676873
35	8.621447	81	0.066911
36	2.706957	12	0.11984
37	9.327101	85	0.648745
38	6.301638	64	0.466355
39	3.22517	21	0.937292
40	2.276387	16	0.927798
41	9.370682	88	0.962376
42	3.829748	35	0.786721
43	2.47628	20	0.634722
44	7.447363	71	0.497444
45	9.898379	93	0.938571
46	2.60233	9	0.155519
47	6.880832	65	0.758134
48	6.473125	57	0.754306
49	4.986313	54	0.703523
50	4.674899	46	0.141767
51	3.671337	42	0.579617
52	3.190045	33	0.485898
53	1.997702	1	0.892014
54	6.521806	59	0.33572
No	Y	x1	x2
55	11.69757	100	0.392791
56	8.197169	76	0.157616
57	4.987732	44	0.488423

58	5.03006	50	0.519756
59	1.933439	3	0.822856
60	10.51714	87	0.299058
61	3.055758	26	0.691538
62	5.68703	62	0.954358
63	4.012183	38	0.013985
64	9.774403	86	0.267365
65	3.220476	27	0.122594
66	3.547902	43	0.543027
67	3.066486	17	0.831972
68	3.809968	19	0.194046
69	2.437851	13	0.65474
70	7.049308	69	0.031577
71	3.068782	29	0.51417
72	4.887498	51	0.267082
73	5.04652	53	0.456823
74	4.09073	34	0.384038
75	3.084043	24	0.863826
76	5.354231	55	0.202963
77	8.651552	78	0.095612
78	3.545162	40	0.917488
79	6.225921	61	0.448636
80	1.756042	10	0.91708
81	7.671711	74	0.437388
82	7.860499	73	0.593294
83	3.936576	31	0.597438
84	8.65778	79	0.423765
85	3.139273	22	0.817089
86	2.840167	18	0.43599
87	5.418476	47	0.330717
88	2.77128	14	0.177718
89	10.39095	89	0.718016
90	6.719595	67	0.733905
91	3.131439	28	0.883416
92	8.087275	75	0.470941
93	7.836401	77	0.815618
94	6.496352	68	0.00062
No	y	x1	x2
95	9.064414	82	0.116736
96	6.027412	56	0.858615
97	10.33152	91	0.489474

No	y	x1	x2
98	2.239189	11	0.020887

99	3.249746	32	0.529953
100	1.68256	4	0.397807

Data hasil simulasi untuk n = 100, varians = 0.01, k=2, knot =1

No	y	x1	x2
1	3.161797	15	0.809166
2	2.245249	10	0.106256
3	9.791915	84	0.318046
4	9.962614	94	0.983732
5	11.55972	100	0.255926
6	10.88821	96	0.833404
7	8.20374	77	0.857441
8	7.591809	66	0.155758
9	3.305677	14	0.399722
10	8.178391	71	0.763977
11	4.27909	26	0.191725
12	1.612225	2	0.705576
13	4.127537	30	0.541945
14	9.438344	78	0.315412
15	10.65774	91	0.49869
16	4.176823	38	0.266553
17	4.08858	46	0.316533
18	9.302238	82	0.982113
19	7.131227	69	0.885524
20	4.030349	24	0.124339
21	11.06063	97	0.150305
22	10.44422	86	0.371281
23	6.933212	65	0.276682
24	6.088851	61	0.164618
25	4.394489	31	0.405297
26	2.606852	8	0.616194
27	2.913117	12	0.643872
28	3.113087	18	0.935348
29	7.054443	67	0.02076
30	1.180032	5	0.012558
31	6.761699	62	0.675324
32	10.27444	83	0.417783
No	y	x1	x2
33	10.53274	85	0.443556
34	1.354054	4	0.849229

35	1.934498	11	0.982958
36	2.843846	17	0.990135
37	3.127968	22	0.756594
38	3.351346	19	0.851725
39	3.052404	28	0.855839
40	3.809171	27	0.644366
41	3.851224	40	0.848381
42	4.070855	32	0.806894
43	5.128709	57	0.66392
44	9.534556	74	0.398462
45	4.2727	41	0.643043
46	9.952371	81	0.54108
47	4.40994	29	0.183046
48	4.941777	52	0.326035
49	10.80913	98	0.11162
50	2.367481	7	0.522848
51	4.663795	39	0.317076
52	3.423857	20	0.653001
53	4.859848	48	0.208998
54	10.93953	92	0.176375
55	4.632861	47	0.354883
56	3.243444	16	0.890023
57	5.80175	60	0.179662
58	3.114577	9	0.435645
59	10.82604	88	0.389898
60	3.795989	44	0.874948
61	6.369743	63	0.758857
62	10.01995	87	0.751064
63	4.19258	45	0.672752
64	2.108782	13	0.896771
No	y	x1	x2
65	8.802489	76	0.695612
66	4.341084	21	0.447732
67	10.75527	89	0.725743
68	4.073831	49	0.62637
69	8.776136	70	0.460566

70	3.953333	23	0.173113
71	4.055225	33	0.292546
72	5.244625	54	0.434395
73	8.379964	75	0.646528
74	10.54883	93	0.118353
75	7.752963	68	0.15259
76	1.972585	6	0.173717
77	5.732756	58	0.498765
78	8.601585	73	0.218518
79	0.947731	1	0.241126
80	4.025243	25	0.783312
81	4.340145	36	0.48795
82	9.9383	79	0.540281
No	Y	x1	x2
83	9.558951	80	0.13514
84	1.440342	3	0.093154

85	5.538474	53	0.578538
86	3.772175	42	0.916237
87	4.698124	50	0.076975
88	5.474401	55	0.256986
89	4.110465	37	0.757447
90	4.74802	56	0.89172
91	11.52603	95	0.537478
92	4.631081	43	0.311861
93	5.171843	51	0.234051
94	3.923891	34	0.841286
95	3.218863	35	0.006581
96	5.285925	59	0.066342
97	10.29935	90	0.722586
98	11.03216	99	0.850212
99	7.764157	72	0.540952
100	7.348979	64	0.491396

Data hasil simulasi untuk n = 100, varians = 0.01, k=2, knot =2

No	Y	x1	x2
1	2.799959	15	0.983066
2	4.188326	26	0.257561
3	4.01316	42	0.383821
4	3.925782	45	0.185271
5	5.09516	49	0.167478
6	1.769812	10	0.561397
7	5.99058	56	0.322741
8	6.637875	61	0.147413
9	3.46614	24	0.025155
10	11.56961	97	0.747819
11	7.332039	66	0.744463
12	11.10588	85	0.355918
13	9.575019	83	0.528728
14	10.51634	84	0.823228
15	3.850961	35	0.916154
16	7.554244	72	0.058438
17	3.638661	17	0.422005
No	Y	x1	x2
18	4.089653	39	0.231787
19	10.48826	100	0.018681
20	4.215756	41	0.977067

21	4.731597	50	0.681838
22	8.05334	71	0.213577
23	10.0396	88	0.387179
24	5.202286	52	0.438779
25	3.660558	34	0.969536
26	11.19557	94	0.116179
27	1.431374	3	0.290073
28	9.423719	82	0.040847
29	3.355376	20	0.364733
30	11.44228	99	0.989841
31	3.362182	14	0.231222
32	4.035194	22	0.48671
33	10.49288	93	0.255068
34	10.06444	87	0.028041
No	y	x1	x2
35	7.555123	70	0.006065
36	9.90313	81	0.435252
37	11.06934	98	0.735661
38	8.994891	75	0.165743
39	11.08273	95	0.307637
40	3.0949	25	0.810633
41	3.664944	33	0.575712

42	2.500095	12	0.277845
43	0.503084	4	0.004062
44	10.85856	96	0.633179
45	0.761262	1	0.868281
46	6.507035	63	0.42259
47	4.089572	38	0.513713
48	8.102641	69	0.850965
49	11.03867	89	0.391737
50	8.711192	77	0.585753
51	4.659768	53	0.759239
52	8.344254	74	0.88255
53	1.846576	7	0.819869
54	4.112839	48	0.572163
55	9.655289	90	0.661751
56	3.879723	28	0.746122
57	4.837372	43	0.358359
58	5.085554	57	0.037341
59	3.167368	18	0.963947
60	3.148693	19	0.772664
61	4.804396	51	0.729234
62	6.690552	65	0.666795
63	3.311039	32	0.071124
64	2.314929	13	0.615158
65	3.73724	29	0.656526
66	3.908584	23	0.119261
67	8.041441	73	0.922038
No	y	x1	x2
68	8.955213	80	0.949962
69	8.631581	76	0.864775
70	10.15106	91	0.779515

71	3.748883	37	0.204985
72	6.059776	60	0.519114
73	1.898314	8	0.861284
74	3.997488	27	0.634275
75	10.25067	86	0.732932
76	7.556832	68	0.429547
77	3.475993	40	0.805991
78	4.990081	47	0.262359
79	2.095429	6	0.038249
80	10.38092	92	0.840262
81	7.490306	67	0.403611
82	2.487874	11	0.4949
83	9.15834	79	0.751845
84	2.417016	5	0.36532
85	4.094452	30	0.29191
86	4.653265	55	0.782415
87	3.745363	21	0.752759
88	5.896121	64	0.419584
89	9.230742	78	0.077259
90	5.731358	59	0.811091
91	2.135092	2	0.33091
92	2.16147	9	0.114213
93	2.647012	16	0.963982
94	3.675511	46	0.570194
95	3.874368	44	0.109507
96	3.496749	36	0.690438
97	3.659705	31	0.993248
98	6.046024	58	0.334087
99	6.614618	62	0.424969
100	4.800464	54	0.109025

Data hasil simulasi untuk n = 100, varians = 0.01, k=2, knot =3

No	y	x1	x2
1	10.20861	91	0.185519
2	10.74167	96	0.114962
No	y	x1	x2
3	6.939571	65	0.897627
4	5.459259	61	0.065706
No	y	x1	x2
5	11.63029	99	0.835972

6	2.560083	14	0.251341
7	3.86416	35	0.175439
8	4.411642	28	0.242875
9	3.194974	17	0.763785
10	2.287352	11	0.656603
11	10.37231	95	0.380386
12	7.907443	72	0.223301
13	1.225277	4	0.523702

14	7.631694	70	0.891009
15	0.858521	2	0.979061
16	1.578618	6	0.386456
17	7.724166	77	0.97919
18	9.154063	80	0.738574
19	3.48391	37	0.667325
20	2.041484	8	0.498882
21	5.863017	58	0.198366
22	4.664521	54	0.499438
23	9.163944	79	0.733046
24	8.823928	75	0.742261
25	4.126271	21	0.248252
26	3.164408	24	0.048398
27	5.47613	57	0.485611
28	10.9455	92	0.287858
29	3.542241	23	0.395765
30	7.944818	74	0.057777
31	4.922408	56	0.426335
32	9.76428	81	0.223682
33	4.205137	32	0.445448
34	4.079628	49	0.765483
35	1.688331	3	0.16992
36	7.537584	71	0.969283
37	11.24558	97	0.26213
38	7.828143	69	0.056072
39	9.392788	83	0.487738
40	3.765748	22	0.1341
41	10.15183	89	0.624163
42	3.630467	18	0.603401
43	9.35205	82	0.629171
44	6.530676	67	0.969649
No	Y	x1	x2
45	4.857361	50	0.023056
46	10.62859	87	0.634412
47	9.815183	85	0.963931
48	8.965603	78	0.714117
49	9.47883	84	0.084708
50	9.878711	86	0.197753
51	3.929298	42	0.276582
52	3.885425	44	0.707047
53	4.825026	53	0.678303

54	4.873458	51	0.34635
55	2.530072	15	0.619661
56	2.742319	12	0.253829
57	4.269966	48	0.787223
58	8.270751	76	0.483773
59	4.349317	47	0.654857
60	3.451647	27	0.718804
61	3.540203	43	0.164854
62	3.296802	40	0.953571
63	1.99624	13	0.529572
64	2.588181	19	0.74816
65	3.876545	26	0.327581
66	1.146706	5	0.878117
67	7.519611	68	0.642597
68	1.308869	1	0.356261
69	5.27104	55	0.2226
70	11.62988	94	0.010254
71	2.570094	16	0.605139
72	4.848553	45	0.783119
73	9.832101	88	0.838113
74	6.523685	63	0.380258
75	4.121801	41	0.026274
76	3.826135	30	0.133046
77	4.320478	39	0.694947
78	11.11082	98	0.398175
79	2.46979	9	0.546046
80	7.175941	66	0.7526
81	11.12752	100	0.264885
82	4.569668	52	0.505077
83	3.290647	38	0.88081
84	1.915296	7	0.001429
No	y	x1	x2
85	7.683734	73	0.911954
86	6.140872	59	0.290893
87	10.81791	93	0.971902
88	3.916892	46	0.8036
89	3.496598	31	0.152641
90	6.601459	64	0.587994
91	4.142391	25	0.183602
92	3.559486	29	0.827749
No	y	x1	x2

93	5.658649	62	0.875926
94	5.289405	60	0.867009
95	3.515076	34	0.975663
96	4.277921	33	0.313266

97	3.719054	20	0.238388
98	2.202333	10	0.594753
99	10.97455	90	0.336718
100	4.162226	36	0.367371

Data hasil simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 1$

No	y	x1	x2
1	3.943801	26	0.239603
2	3.552767	18	0.581515
3	2.437589	10	0.371145
4	6.879887	64	0.878884
5	2.803604	15	0.103996
6	6.746182	63	0.55851
7	8.277642	78	0.955075
8	3.628948	29	0.10625
9	2.854886	12	0.204615
10	11.51141	98	0.149952
11	3.203952	19	0.178199
12	4.086007	24	0.468197
13	8.622028	73	0.924317
14	4.028186	37	0.3023
15	4.331635	45	0.431837
16	9.509061	85	0.757638
17	5.673851	60	0.82069
18	3.726877	50	0.980882
19	7.588182	65	0.574678
20	9.971252	80	0.353217
21	7.425983	68	0.075673
22	8.421017	74	0.863543
23	3.720606	20	0.594224
24	4.637134	44	0.606188
25	4.533699	38	0.544618
26	1.805999	3	0.692702
27	2.247971	6	0.252423
No	y	x1	x2
28	3.627719	33	0.843819
29	8.451648	72	0.268509
30	1.175041	2	0.842661
31	5.446469	56	0.555523
32	4.446706	46	0.446517

33	2.962243	14	0.32337
34	10.99835	97	0.009491
35	6.114536	61	0.028288
36	6.155707	58	0.508273
37	2.880454	9	0.677251
38	7.597298	69	0.878165
39	10.20927	90	0.863986
40	2.844186	13	0.259612
41	5.131355	55	0.267468
42	2.057947	11	0.864908
43	3.455683	32	0.934409
44	3.124957	16	0.298831
45	4.786381	54	0.705375
46	10.59745	88	0.043624
47	4.347798	53	0.951108
48	3.839174	31	0.56753
49	9.293249	76	0.274487
50	3.616643	34	0.968191
51	11.31494	100	0.60082
52	5.651522	62	0.906618
53	7.493733	66	0.39193
54	3.365875	22	0.497941
No	y	x1	x2
55	10.57033	82	0.295137
56	7.188042	67	0.181544
57	2.571549	7	0.648216
58	11.06049	95	0.003664
59	4.523354	27	0.228923
60	4.144483	23	0.294249
61	2.711489	8	0.345415
62	10.2719	93	0.04843
63	4.190738	43	0.407822
64	4.494148	41	0.204427
65	1.656673	1	0.512382

66	4.523129	39	0.523968
67	8.002297	75	0.897626
68	9.771698	81	0.076395
69	11.10329	99	0.754959
70	11.16061	96	0.380606
71	4.764013	48	0.172898
72	9.74649	77	0.498195
73	3.907052	25	0.490443
74	4.481118	36	0.532545
75	4.673958	52	0.208477
76	9.708418	87	0.986107
77	2.989204	17	0.543042
No	Y	x1	x2
78	9.604582	79	0.653699
79	3.811505	28	0.616449
80	10.69455	89	0.470029
81	4.619574	47	0.230247
82	4.092143	49	0.916391

83	11.12649	94	0.133215
84	4.063818	35	0.192131
85	10.02515	86	0.036405
86	10.6653	91	0.999362
87	10.31036	84	0.592122
88	7.292269	71	0.802993
89	4.078992	51	0.116873
90	9.510174	83	0.136065
91	5.897737	57	0.64373
92	3.251645	42	0.944748
93	3.565092	40	0.849839
94	1.891035	5	0.803304
95	3.714143	30	0.887203
96	7.80313	70	0.399883
97	5.991209	59	0.245177
98	1.838762	4	0.706502
99	3.995978	21	0.389552
100	11.21813	92	0.656762

Data hasil simulasi untuk n = 100, varians = 0.01, k=3, knot =2

No	Y	x1	x2
1	2.817524	18	0.560805
2	2.341889	10	0.232836
3	2.948757	15	0.097698
4	3.472912	37	0.276069
5	9.239221	78	0.512077
6	4.529042	49	0.169453
7	5.624303	60	0.106141
8	9.263579	83	0.766452
9	3.023738	25	0.616002
10	2.080189	11	0.800697
11	8.948464	79	0.77033
12	5.099114	52	0.327472
No	Y	x1	x2
13	10.30011	94	0.673626
14	7.871385	65	0.392145
15	6.237298	63	0.791668
16	7.150084	70	0.040546
17	3.11482	16	0.258845
18	3.927436	22	0.137689

19	3.786236	30	0.261444
20	8.718429	81	0.782056
21	1.936526	7	0.679434
22	7.520996	66	0.343865
23	3.980926	32	0.469082
24	11.14406	98	0.219243
No	y	x1	x2
25	4.099952	46	0.227477
26	3.707009	28	0.243695
27	4.314418	50	0.144577
28	2.29356	8	0.514129
29	9.480675	87	0.561997
30	11.39087	95	0.347702
31	1.634509	2	0.879669
32	4.602913	53	0.563194
33	8.804429	76	0.874027
34	4.680878	43	0.18794
35	9.099698	75	0.448917
36	10.09457	89	0.663176
37	9.273413	73	0.190784

38	5.314629	59	0.458724
39	7.138467	68	0.468585
40	9.358906	84	0.617198
41	3.948534	27	0.75946
42	3.300964	17	0.880441
43	6.376363	62	0.244666
44	4.485292	39	0.368692
45	8.237653	74	0.658381
46	3.128536	23	0.840582
47	3.744924	40	0.821989
48	11.76116	100	0.967485
49	10.28511	90	0.851661
50	10.37477	93	0.963831
51	4.49608	55	0.528588
52	4.896286	51	0.36567
53	4.097226	35	0.361204
54	3.815852	38	0.506866
55	3.478108	36	0.011993
56	10.09111	92	0.018826
57	2.511331	13	0.309835
58	3.552433	19	0.459635
59	2.05753	4	0.611807
60	4.106487	41	0.256847
61	3.887434	44	0.147237
62	3.648081	24	0.83266
No	y	x1	x2
63	7.464998	69	0.540634
64	1.163808	1	0.72298
65	10.88839	97	0.718363
66	3.712737	26	0.471588
67	1.440633	5	0.689206
68	2.549732	14	0.431785
69	3.858512	34	0.221623

70	9.169875	77	0.168587
71	4.207114	42	0.168763
72	3.342184	33	0.023497
73	10.91636	96	0.690757
74	2.770026	9	0.966475
75	6.767978	67	0.464752
76	10.26431	86	0.337317
77	4.106091	31	0.884085
78	9.903925	91	0.056587
79	2.472348	12	0.40089
80	6.586687	64	0.669793
81	2.264832	3	0.757538
82	3.576285	21	0.268377
83	3.997412	45	0.223309
84	3.60895	29	0.806189
85	4.019306	54	0.944416
86	4.697232	56	0.593823
87	10.29557	88	0.79217
88	1.733401	6	0.927912
89	5.611193	58	0.809267
90	5.49756	57	0.114743
91	3.912837	48	0.495808
92	9.345742	82	0.8586
93	3.141132	20	0.877048
94	10.19071	85	0.343374
95	7.7913	72	0.564836
96	8.053271	71	0.26388
97	9.367488	80	0.876543
98	6.416901	61	0.701894
99	4.0898	47	0.221717
100	11.39116	99	0.492194

Data hasil simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 3$

No	y	x1	x2
1	8.46102	75	0.575094
2	11.01663	93	0.249405
3	0.852132	1	0.708723
4	4.126124	42	0.169575

5	8.442109	76	0.04196
6	2.013817	7	0.104342
7	8.106159	70	0.37684
8	4.058361	49	0.081227
9	4.14158	35	0.780057

10	9.679065	83	0.36279
11	2.915873	12	0.259076
12	10.01052	86	0.391008
13	4.500724	54	0.809867
14	3.960514	45	0.113881
15	9.199244	84	0.594368
16	8.616035	74	0.491992
17	3.551076	23	0.222742
18	5.778013	61	0.662279
19	2.07361	18	0.941362
20	4.12116	46	0.109698
21	1.326112	6	0.045768
22	4.294201	37	0.716322
23	7.033262	63	0.521642
24	2.918362	22	0.435285
25	8.49089	73	0.153786
26	1.611487	11	0.977041
27	11.47748	98	0.214415
28	3.89074	51	0.725204
29	9.113453	81	0.875442
30	4.572032	55	0.235276
31	3.564396	39	0.67755
32	2.662219	17	0.825452
33	3.086826	24	0.791795
34	3.753097	48	0.84458
35	10.03906	85	0.125258
36	3.908717	44	0.826872
37	3.371412	47	0.487596
38	0.995034	10	0.951858
39	5.80236	57	0.308179
No	Y	x1	x2
40	10.15013	92	0.88121
41	6.658395	67	0.512431
42	10.84376	96	0.645697
43	2.131493	8	0.537086
44	3.905239	36	0.828877
45	8.209801	72	0.714861
46	6.21488	65	0.941505
47	10.19795	95	0.072457
48	11.30408	97	0.833546
49	3.510371	33	0.953976

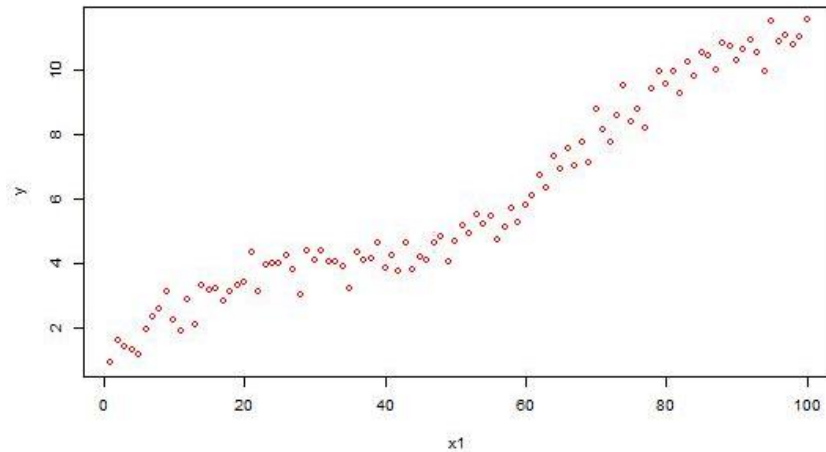
50	9.688339	82	0.183517
51	1.444531	5	0.415137
52	4.988859	59	0.41945
53	10.74566	94	0.100402
54	7.446248	68	0.909139
55	2.573721	13	0.459625
56	3.44157	19	0.605783
57	6.768612	66	0.125714
58	3.094813	25	0.511237
59	3.646732	29	0.74084
60	9.318603	80	0.07186
61	7.852939	69	0.294321
62	8.446024	77	0.972467
63	3.307107	20	0.112387
64	3.729189	34	0.886101
65	6.144793	62	0.551111
66	7.513607	71	0.047207
67	4.097023	28	0.465685
68	4.021936	31	0.071126
69	3.510984	38	0.910001
70	4.352451	50	0.040352
71	9.297081	78	0.692871
72	3.318557	27	0.884863
73	3.986765	53	0.987147
74	4.341795	40	0.245672
75	1.392624	2	0.463702
76	9.340816	79	0.306771
77	10.17082	90	0.080271
78	3.167077	16	0.605465
No	y	x1	x2
79	11.25213	99	0.681191
80	10.51845	87	0.257656
81	5.394371	58	0.495226
82	3.817278	21	0.810227
83	10.40537	89	0.559962
84	3.920142	41	0.763164
85	6.690606	64	0.396238
86	10.27599	88	0.481339
87	9.683718	91	0.464117
88	11.66465	100	0.684509
89	2.431467	14	0.021802

No	y	x1	x2
90	1.788179	4	0.600884
91	3.983432	43	0.885146
92	4.429707	52	0.39586
93	3.527172	26	0.525377
94	5.987418	60	0.423493

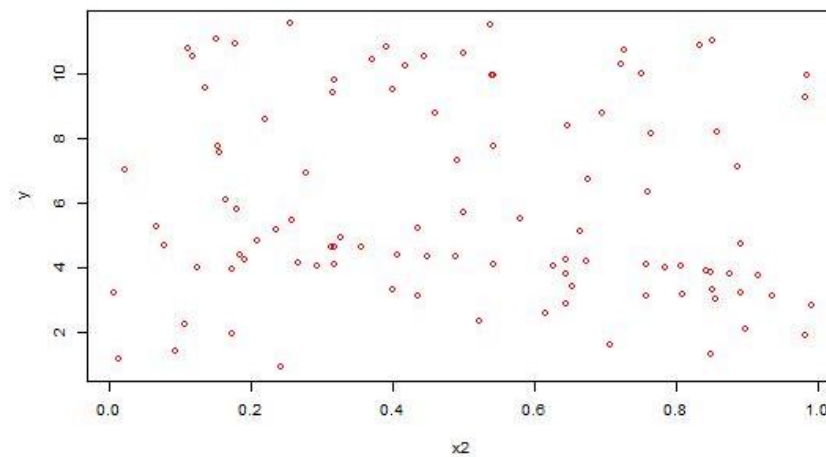
95	2.275226	9	0.750965
96	4.997533	56	0.832109
97	2.017495	3	0.172848
98	3.288926	30	0.149555
99	2.860666	15	0.354579
100	4.216674	32	0.428195

Lampiran 2. Plot Data X vs Y

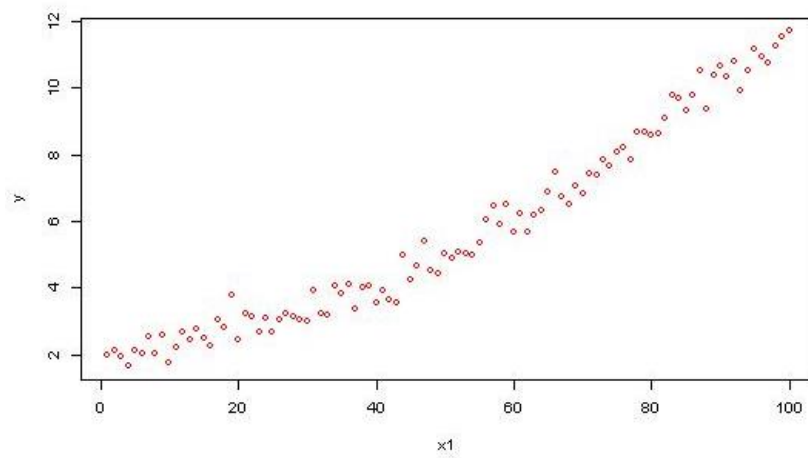
Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} = 1$



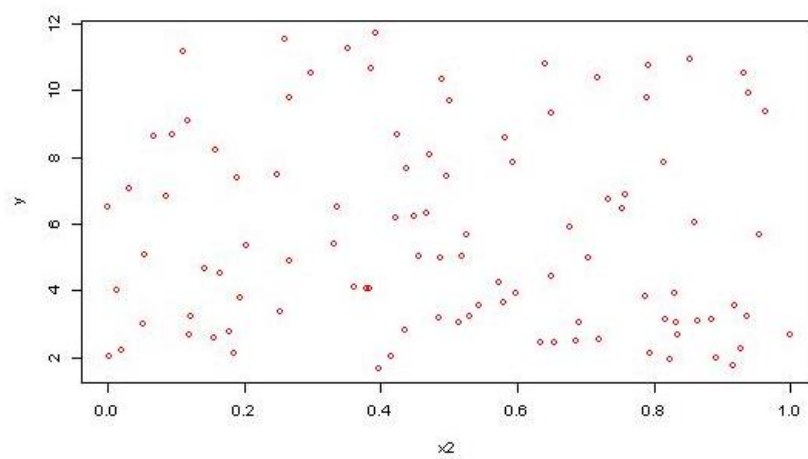
Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} = 1$



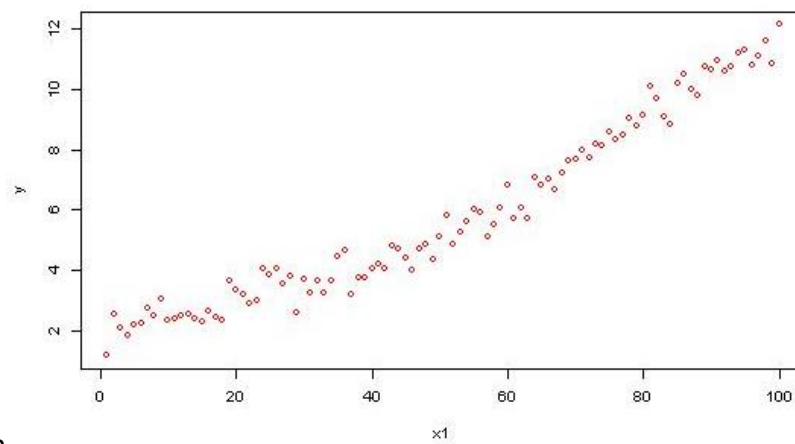
Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} = 2$



Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} = 2$

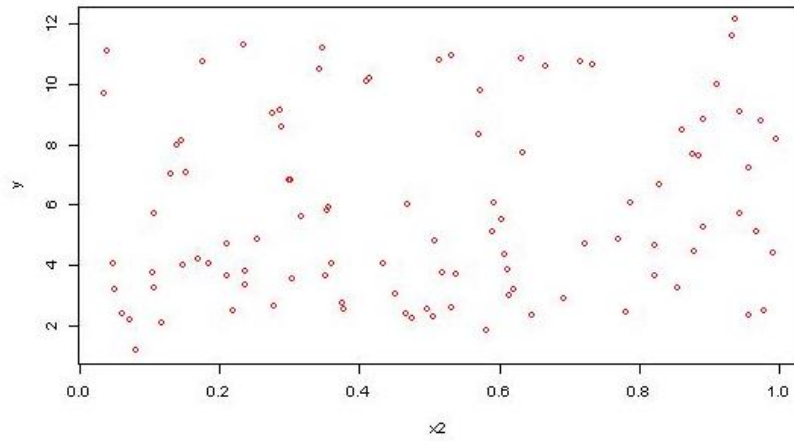


Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, knot



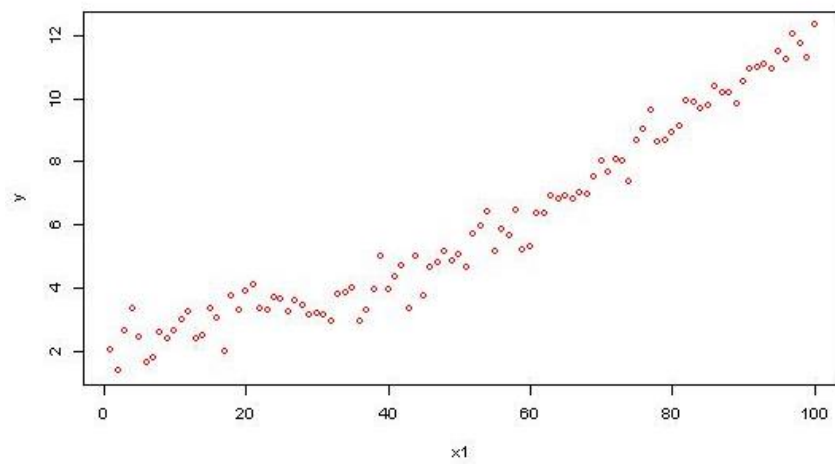
=3

Plot Data x2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, knot

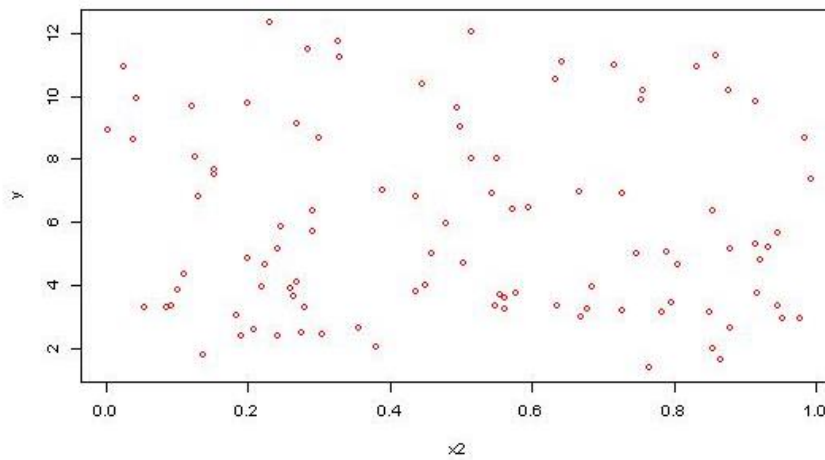


=3

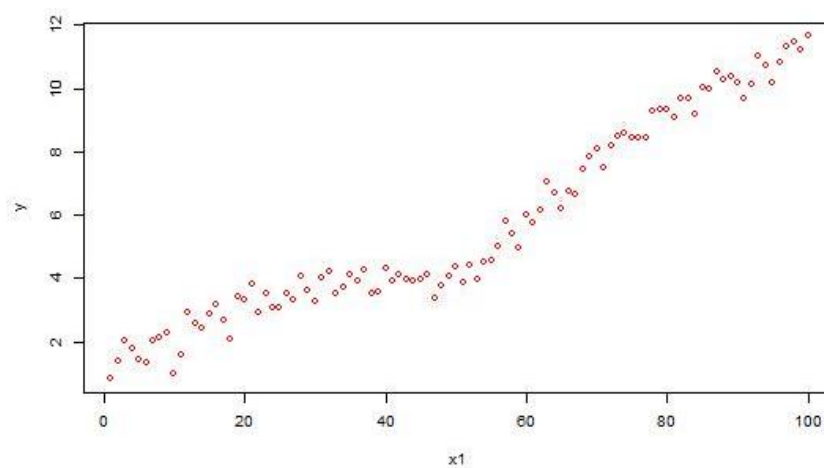
Plot Data x1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, knot =1



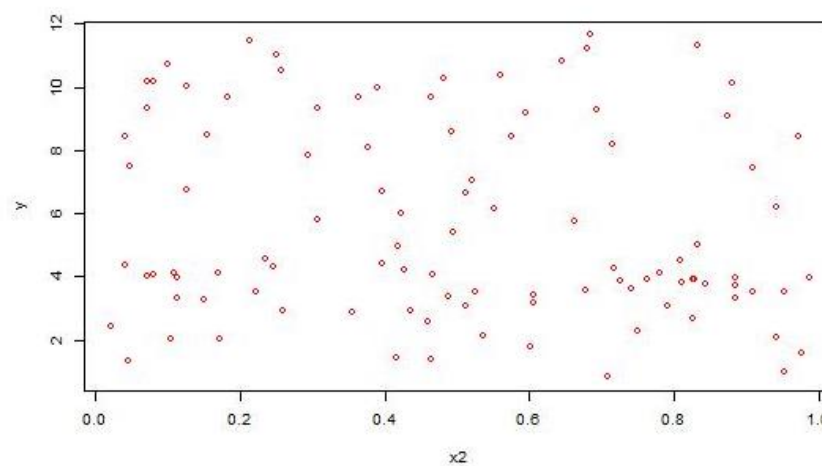
Plot Data x2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, knot =1



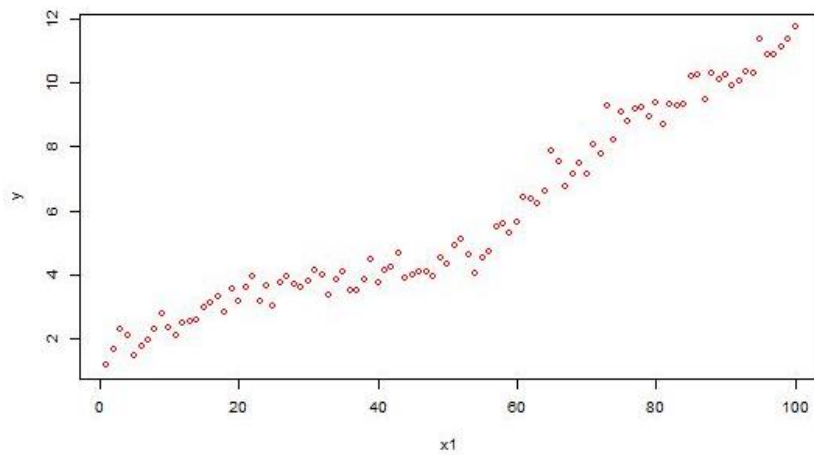
Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} = 2$



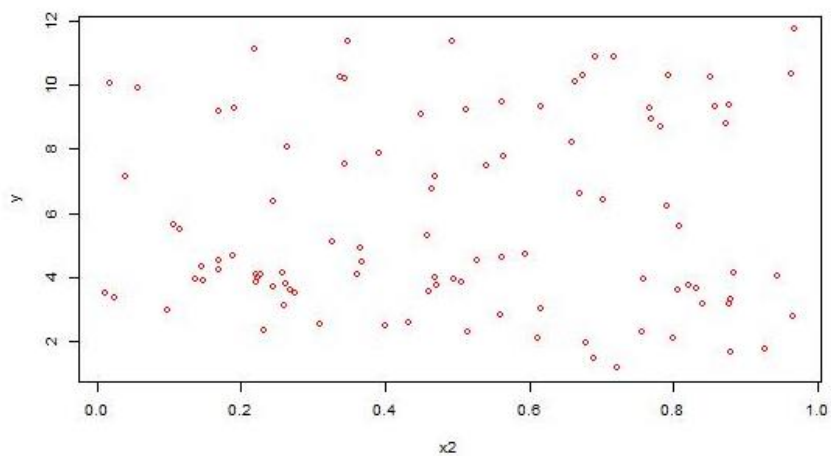
Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} = 2$



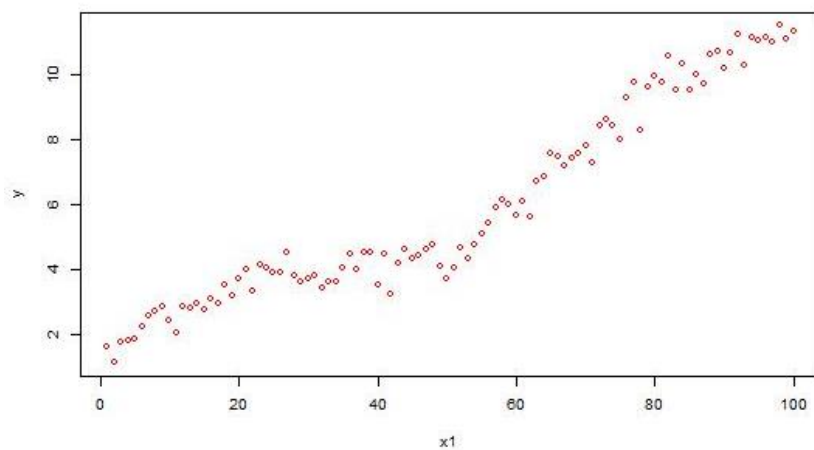
Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} = 3$



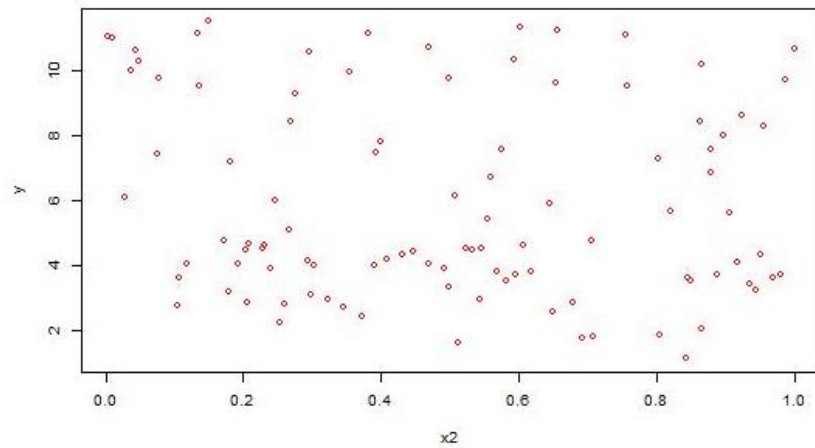
Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot}=3$



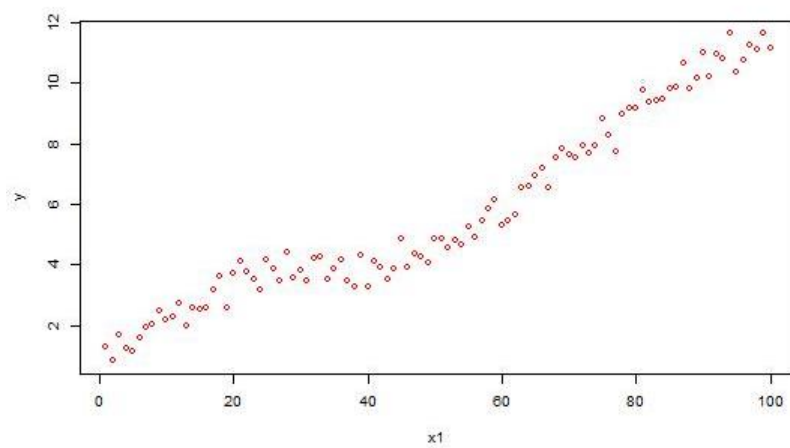
Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot}=1$



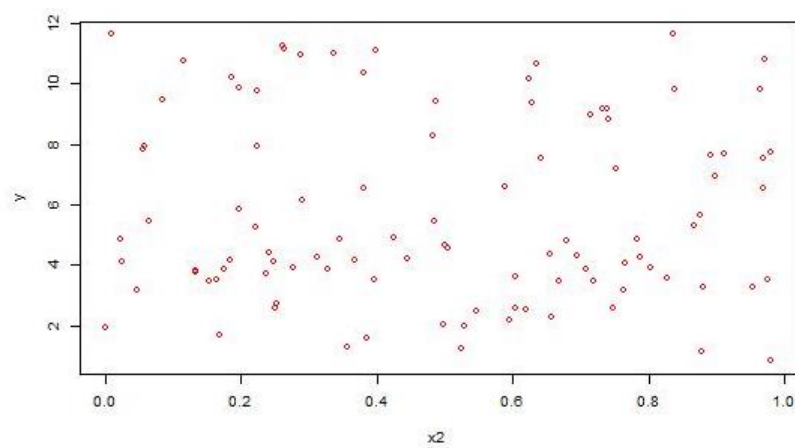
Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot}=1$



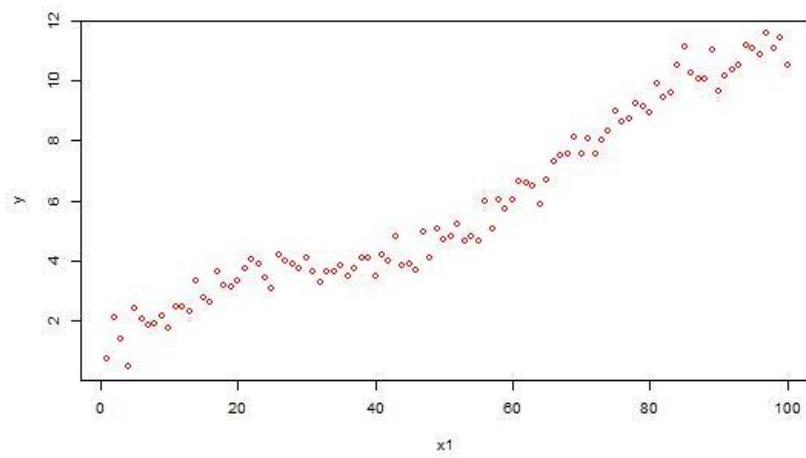
Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 2$



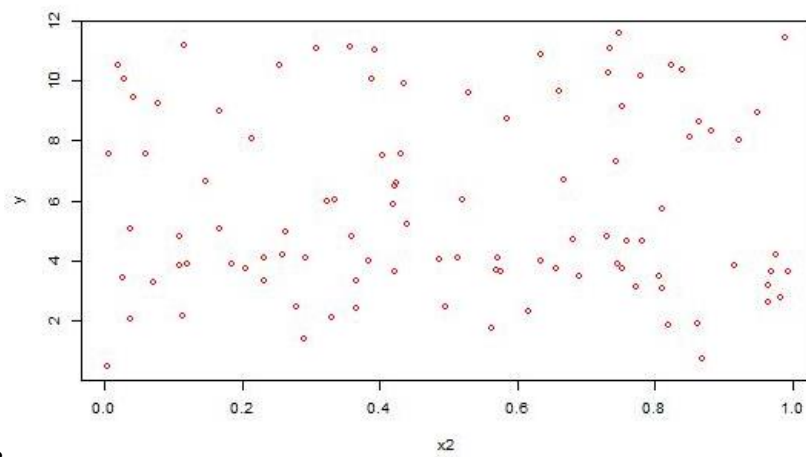
Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 2$



Plot Data x_1 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 3$



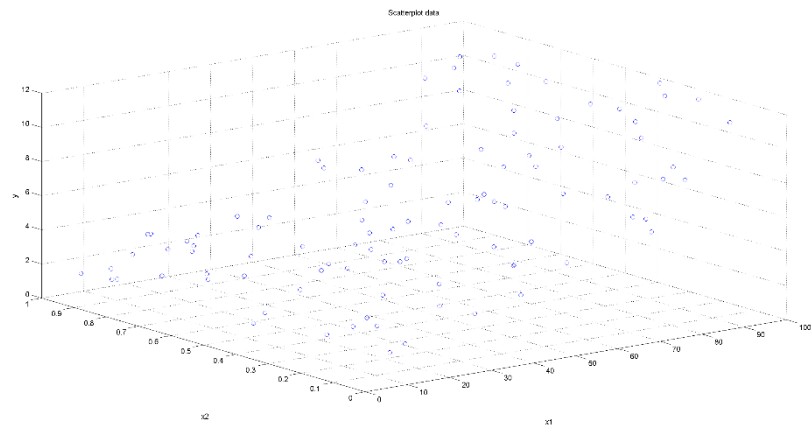
Plot Data x_2 vs y untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, knot



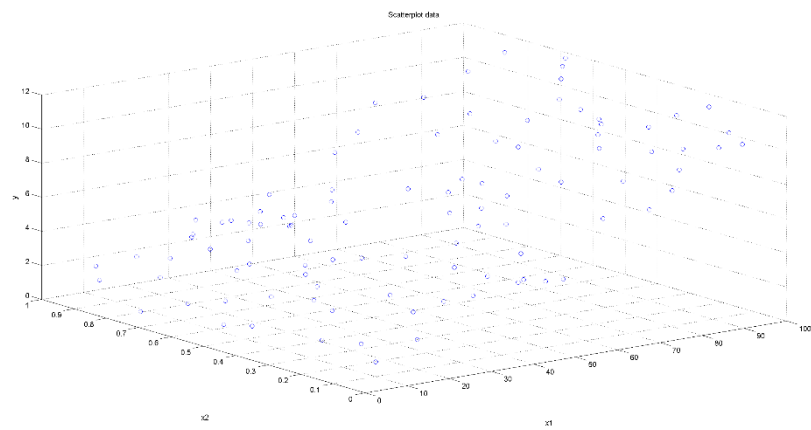
=3

Lampiran 3. Scatterplot data simulasi

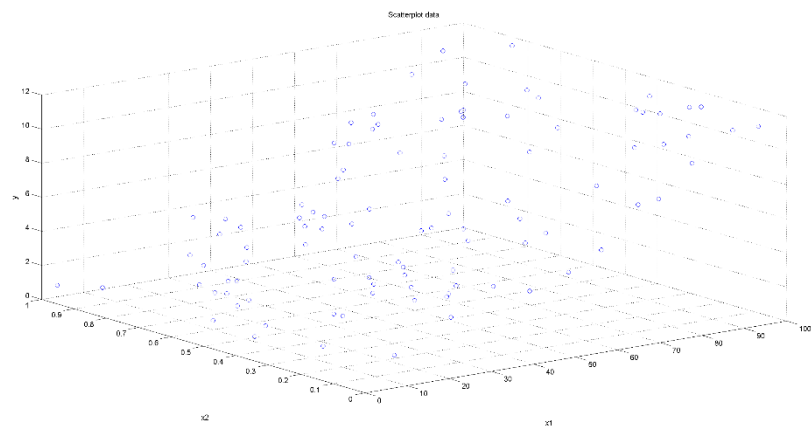
Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} =1$



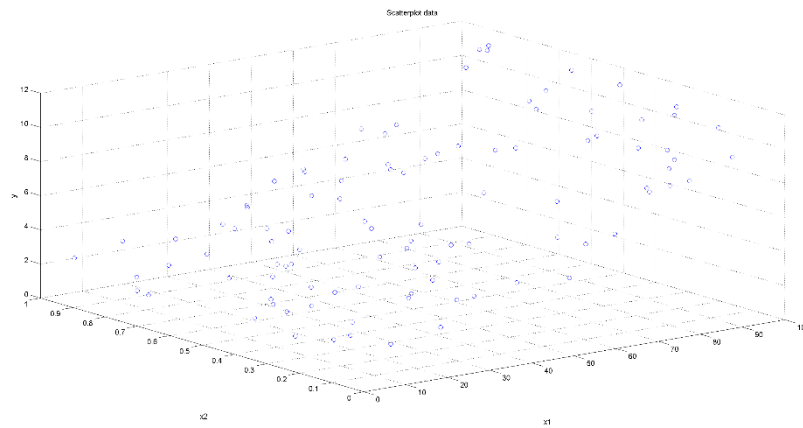
Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} =2$



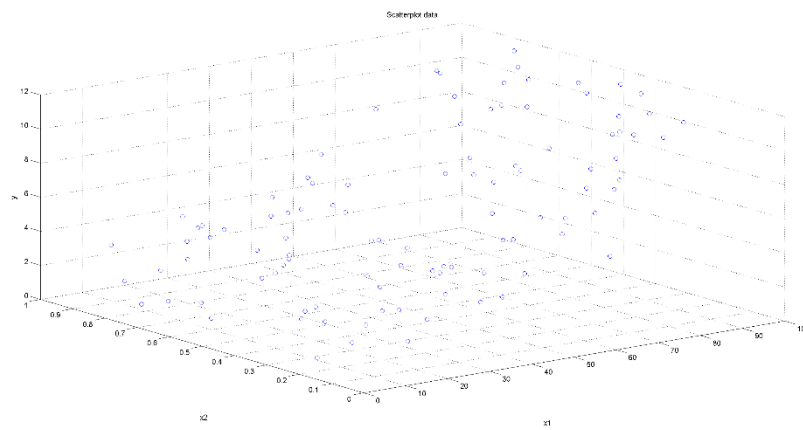
Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} =3$



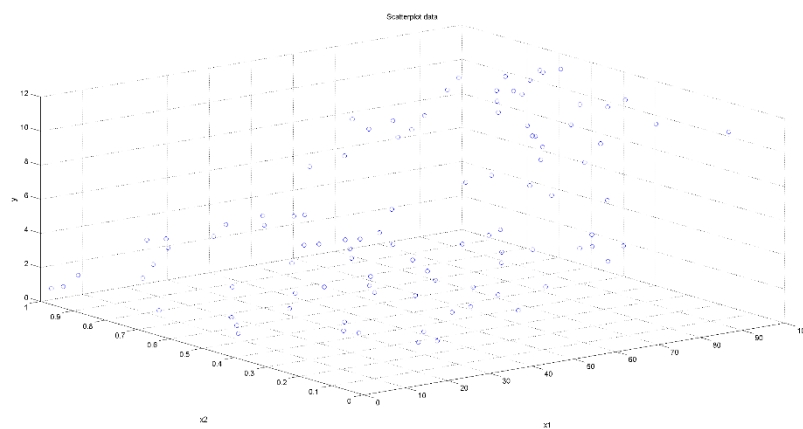
Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} = 1$



Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} = 2$

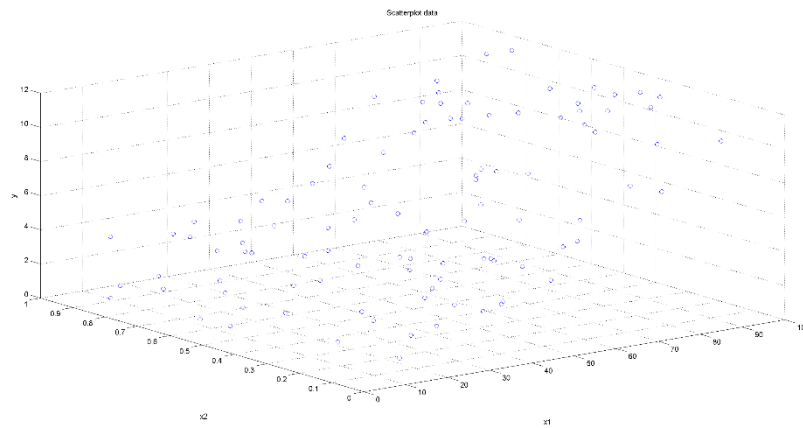


Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} = 3$

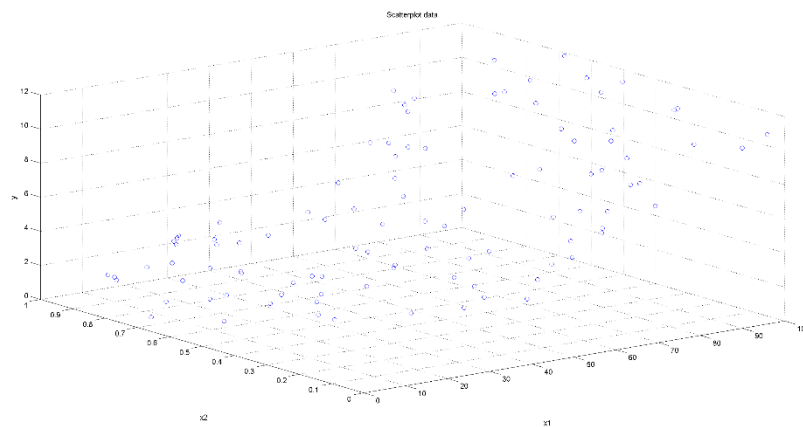




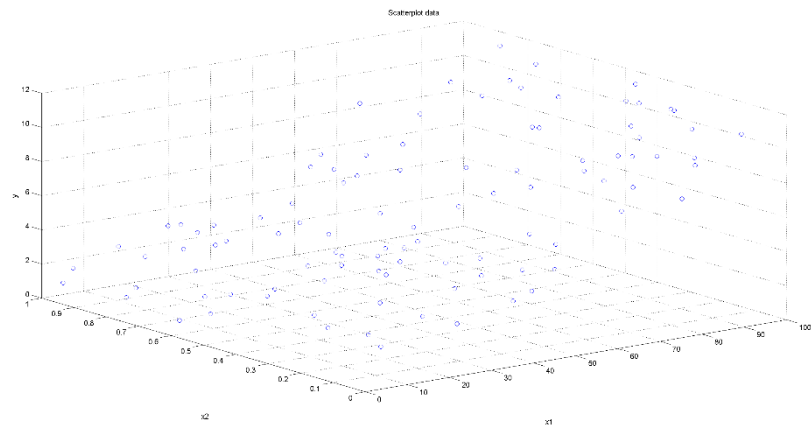
Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} =1$



Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} =2$

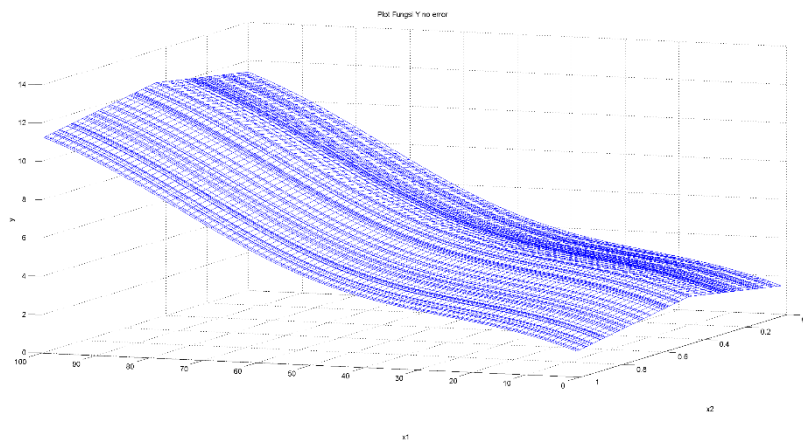


Plot 3D untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} =3$

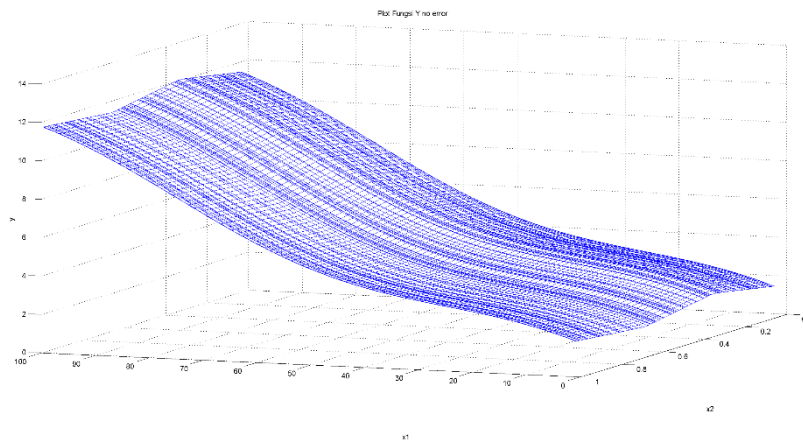


Lampiran 4. Plot 3D data Simulasi

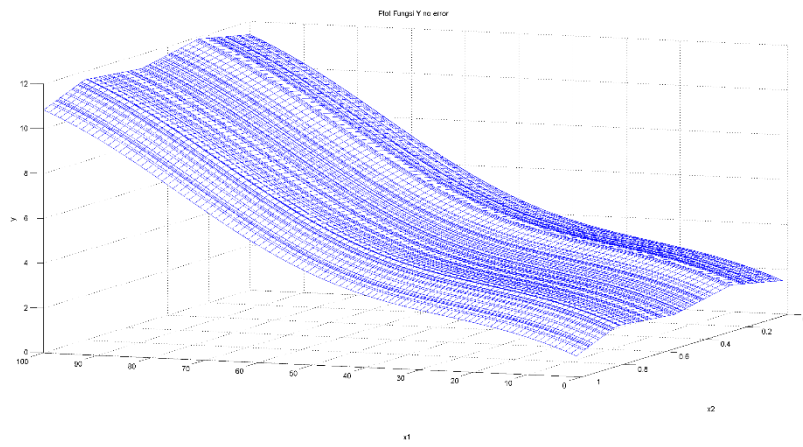
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} =1$



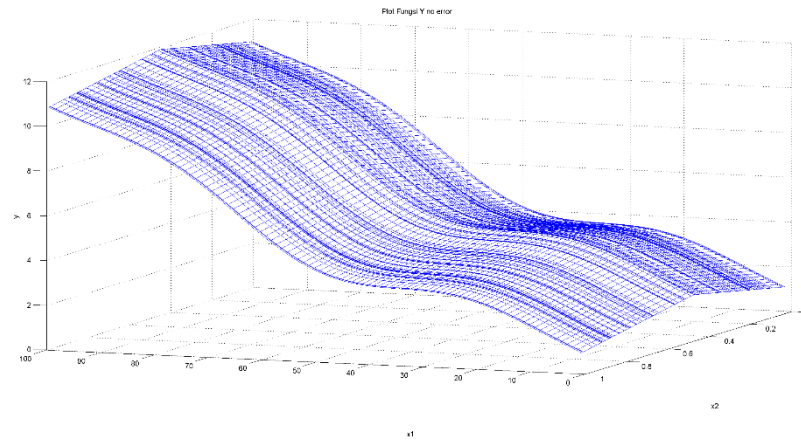
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} =2$



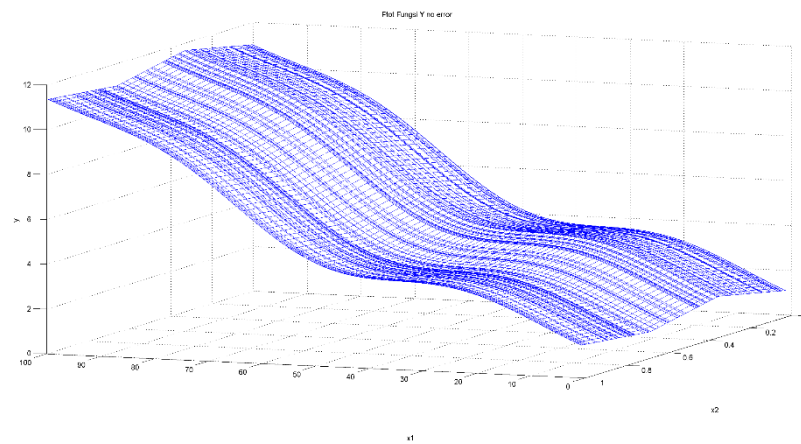
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=1$, $\text{knot} =3$



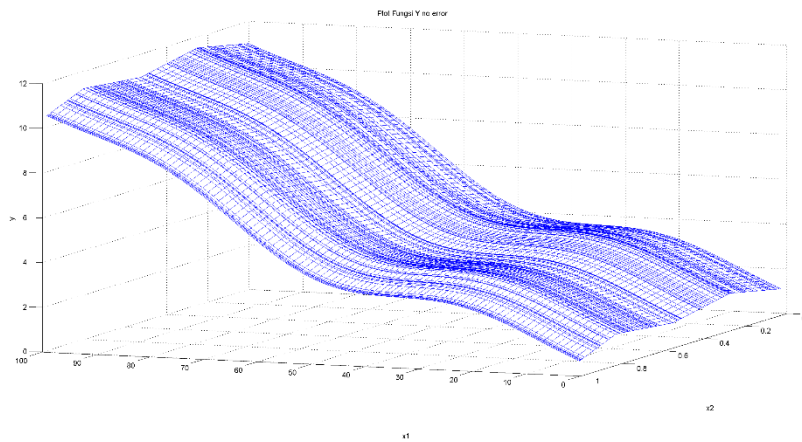
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} =1$



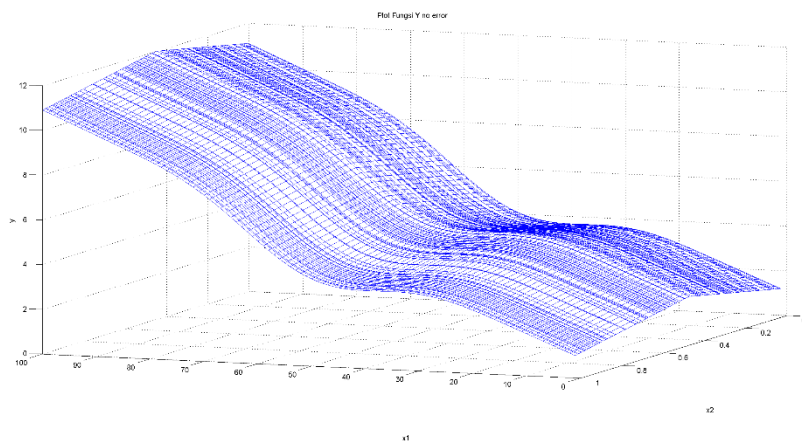
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} =2$



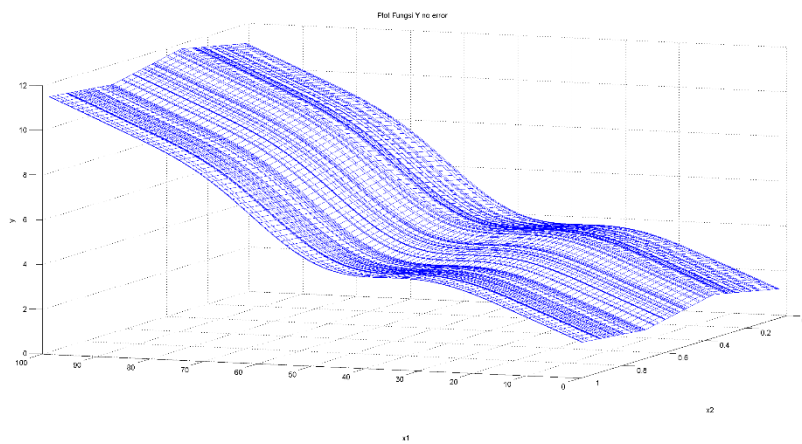
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=2$, $\text{knot} =3$



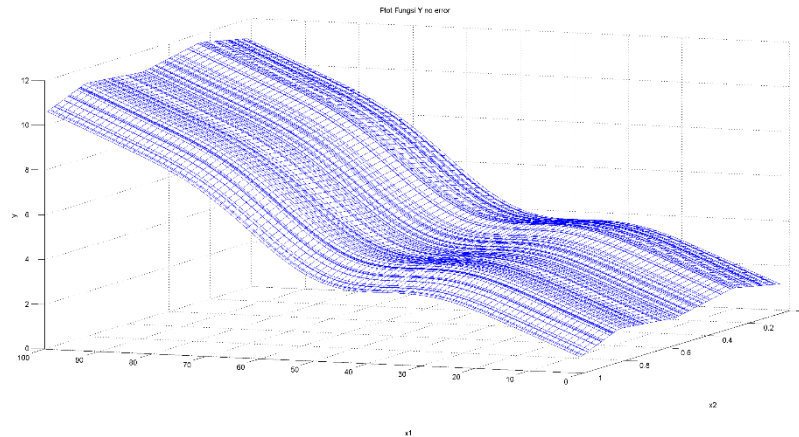
Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 1$



Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 2$



Plot 3D data simulasi untuk $n = 100$, $\text{varians} = 0.01$, $k=3$, $\text{knot} = 3$



Lampiran 5. Program Simulasi

```

options(digits=8)
run=function()
{
  v=1
  rep=1
  n=c(50);
  vari=c(0.1);
  k1=c(1) #nilai k asli
  ksearch=3
  nk1=length(k1)
  nn=length(n)
  nvari=length(vari)
  nameori="e:/output_spline/38/"
  name=paste0(nameori,"result/")
  #i=1;j=1;k=1;l=1
  for (i in 1:nvari)
  {
    for (j in 1:nn)
    {
      for (k in 1:nk1)
      {
        nc=paste0('rep',c(1:rep))
        nc2=c('K','knot','GCV','lambda','Rsqr','MSE')

        namer3=c('b',paste0('a',c(0:ksearch)), 'beta',paste0('alfa',c(1:3)),paste0('knot',c(1:3)
        ))

        sknot1=matrix(ncol=rep,nrow=3+ksearch+2*3);sknotnon1=matrix(ncol=rep,nrow=
        3+ksearch+2*3) #penampung knot

        sknot2=matrix(ncol=rep,nrow=3+ksearch+2*3);sknotnon2=matrix(ncol=rep,nrow=
        3+ksearch+2*3)
      }
    }
  }
}

```

```

sknot3=matrix(ncol=rep,nrow=3+ksearch+2*3);sknotnon3=matrix(ncol=rep,nrow=
3+ksearch+2*3)
sh1=matrix(ncol=(rep+1),nrow=6);shnon1=matrix(ncol=(rep+1),nrow=6)
#penampung Rsq dkk
sh2=matrix(ncol=(rep+1),nrow=6);shnon2=matrix(ncol=(rep+1),nrow=6)
sh3=matrix(ncol=(rep+1),nrow=6);shnon3=matrix(ncol=(rep+1),nrow=6)
rownames(sh1)<-nc2;rownames(shnon1)<-nc2
rownames(sh2)<-nc2;rownames(shnon2)<-nc2
rownames(sh3)<-nc2;rownames(shnon3)<-nc2
colnames(sknot1)<-nc;colnames(sknotnon1)<-nc;
colnames(sknot2)<-nc;colnames(sknotnon2)<-nc;
colnames(sknot3)<-nc;colnames(sknotnon3)<-nc;
rownames(sknot1)<-namer3;rownames(sknotnon1)<-namer3;
rownames(sknot2)<-namer3;rownames(sknotnon2)<-namer3;
rownames(sknot3)<-namer3;rownames(sknotnon3)<-namer3;
for ( l in 1:rep)
{
  print(l)
  cat("***** K = ",k1[k],"rep=",l," n =
",n[j]," var =
",vari[i],"*****
**","\n")

aa=GCV(n[j],vari[i],0,k1[k],v,paste0(paste0(nameori,'rep',l,'/v=',v,'/n=',n[j],'/var=',v
ari[i],'/k=',k1[k],'/')),ksearch)
  print(aa)

sknot1[((3+ksearch):(2+ksearch+length(aa$hk1))),l]=(aa$hk1);sknotnon1[((3+kse
arch):(2+ksearch+length(aa$hkn1))),l]=(aa$hkn1) #hk=beta

sknot2[((3+ksearch):(2+ksearch+length(aa$hk2))),l]=(aa$hk2);sknotnon2[((3+kse
arch):(2+ksearch+length(aa$hkn2))),l]=(aa$hkn2)

sknot3[((3+ksearch):(2+ksearch+length(aa$hk3))),l]=(aa$hk3);sknotnon3[((3+kse
arch):(2+ksearch+length(aa$hkn3))),l]=(aa$hkn3)

sknot1[((7+ksearch):(6+ksearch+length(aa$hkkn1))),l]=(aa$hkkn1);sknotnon
1[((7+ksearch):(6+ksearch+length(aa$hkkn1))),l]=(aa$hkkn1)
#hknot=knot

sknot2[((7+ksearch):(6+ksearch+length(aa$hkkn2))),l]=(aa$hkkn2);sknotnon
2[((7+ksearch):(6+ksearch+length(aa$hkkn2))),l]=(aa$hkkn2)

sknot3[((7+ksearch):(6+ksearch+length(aa$hkkn3))),l]=(aa$hkkn3);sknotnon
3[((7+ksearch):(6+ksearch+length(aa$hkkn3))),l]=(aa$hkkn3)

```

```

sknot1[(1:length(aa$hka1)),l]=aa$hka1;sknotnon1[(1:length(aa$hkanon1)),l]=aa$h
kanon1 #hka=alfa

sknot2[(1:length(aa$hka2)),l]=aa$hka2;sknotnon2[(1:length(aa$hkanon2)),l]=aa$h
kanon2

sknot3[(1:length(aa$hka3)),l]=aa$hka3;sknotnon3[(1:length(aa$hkanon3)),l]=aa$h
kanon3

sh1[(l+1)]=rbind(aa$kmin1,aa$sknotmin1,t(aa$sg1));shnon1[(l+1)]=rbind(aa$kmin
1,aa$sknotmin1,t(aa$sgnon1))

sh2[(l+1)]=rbind(aa$kmin2,aa$sknotmin2,t(aa$sg2));shnon2[(l+1)]=rbind(aa$kmin
2,aa$sknotmin2,t(aa$sgnon2))

sh3[(l+1)]=rbind(aa$kmin3,aa$sknotmin3,t(aa$sg3));shnon3[(l+1)]=rbind(aa$kmin
3,aa$sknotmin3,t(aa$sgnon3))
}
{
  mypath <- file.path(paste(name,'K = ',k1[k],' Box Plot Estimasi Parameter n =
',n[j]," var = ",vari[i],' v = ',v,"_1 knot.jpg", sep = ""))
  jpeg(file=mypath,width=1104,height=663)
  boxplot(t(sknot1[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(3+ksearch+1),(nrow(sknot1)-
2)),]),main=paste('Box Plot Estimasi Parameter n = ',n[j]," var = ",vari[i],'K=',k1[k],' v
= ',v,'_1 knot'),
    xlab='parameter',ylab='nilai',col=rainbow(ncol(t(sknot1))),staplewex=1)
  dev.off()
  mypath <- file.path(paste(name,'K = ',k1[k],' Box Plot Estimasi Parameter n =
',n[j]," var = ",vari[i],' v = ',v,"_2 knot.jpg", sep = ""))
  jpeg(file=mypath,width=1104,height=663)
  boxplot(t(sknot2[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(3+ksearch+2),(nrow(sknot1)-
2):(nrow(sknot1)-1)),]),main=paste('Box Plot Estimasi Parameter n = ',n[j]," var =
",vari[i],'K=',k1[k],' v = ',v,'_2 knot'),
    xlab='parameter',ylab='nilai',col=rainbow(ncol(t(sknot2))),staplewex=1)
  dev.off()
  mypath <- file.path(paste(name,'K = ',k1[k],' Box Plot Estimasi Parameter n =
',n[j]," var = ",vari[i],' v = ',v,"_3 knot.jpg", sep = ""))
  jpeg(file=mypath,width=1104,height=663)
  boxplot(t(sknot3[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(3+ksearch+3),(nrow(sknot1)-
2):(nrow(sknot1))))]),main=paste('Box Plot Estimasi Parameter n = ',n[j]," var =
",vari[i],'K=',k1[k],' v = ',v,'_3 knot'),
    xlab='parameter',ylab='nilai',col=rainbow(ncol(t(sknot3))),staplewex=1)
  dev.off()
  mypath <- file.path(paste(name,'K = ',k1[k],' Box Plot Estimasi Parameter non
optimum n = ',n[j]," var = ",vari[i],' v = ',v,"_1 knot.jpg", sep = ""))
  jpeg(file=mypath,width=1104,height=663)

```

```

    boxplot(t(sknotnon1[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(3+ksearch+1),(nrow(sknot1)-
2)),]),main=paste('Box Plot Estimasi Parameter non optimum n = ',n[j]," var =
",vari[i],'K=',k1[k],' v = ',v,'_1 knot'),

xlab='parameter',ylab='nilai',col=rainbow(ncol(t(sknotnon1))),staplewex=1)
    dev.off()
    mypath <- file.path(paste(name,'K = ',k1[k],' Box Plot Estimasi Parameter non
optimum n = ',n[j]," var = ",vari[i],' v = ',v,"_2 knot.jpg", sep = ""))
    jpeg(file=mypath,width=1104,height=663)
    boxplot(t(sknotnon2[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(3+ksearch+2),(nrow(sknot1)-
2):(nrow(sknot1)-1))),]),main=paste('Box Plot Estimasi Parameter non optimum n =
',n[j]," var = ",vari[i],'K=',k1[k],' v = ',v,'_2 knot'),

xlab='parameter',ylab='nilai',col=rainbow(ncol(t(sknotnon2))),staplewex=1)
    dev.off()
    mypath <- file.path(paste(name,'K = ',k1[k],' Box Plot Estimasi Parameter non
optimum n = ',n[j]," var = ",vari[i],' v = ',v,"_3 knot.jpg", sep = ""))
    jpeg(file=mypath,width=1104,height=663)
    boxplot(t(sknotnon3[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(3+ksearch+3),(nrow(sknot1)-
2):(nrow(sknot1))),]),main=paste('Box Plot Estimasi Parameter non optimum n =
',n[j]," var = ",vari[i],'K=',k1[k],' v = ',v,'_3 knot'),

xlab='parameter',ylab='nilai',col=rainbow(ncol(t(sknotnon3))),staplewex=1)
    dev.off()
}
    sknot1=cbind(sknot1,rowMeans(sknot1,na.rm =
TRUE));sknotnon1=cbind(sknotnon1,rowMeans(sknotnon1,na.rm = TRUE));
    sknot2=cbind(sknot2,rowMeans(sknot2,na.rm =
TRUE));sknotnon2=cbind(sknotnon2,rowMeans(sknotnon2,na.rm = TRUE));
    sknot3=cbind(sknot3,rowMeans(sknot3,na.rm =
TRUE));sknotnon3=cbind(sknotnon3,rowMeans(sknotnon3,na.rm = TRUE));

sh1=cbind(sh1,rowMeans(sh1,na.rm=T));shnon1=cbind(shnon1,rowMeans(shnon1,
na.rm=T));

sh2=cbind(sh2,rowMeans(sh2,na.rm=T));shnon2=cbind(shnon2,rowMeans(shnon2,
na.rm=T));

sh3=cbind(sh3,rowMeans(sh3,na.rm=T));shnon3=cbind(shnon3,rowMeans(shnon3,
na.rm=T));

    sparasli1=matrix(ncol=1,nrow=nrow(sknot1));colnames(sparasli1)<-
'parameter asli'
    sparasli2=matrix(ncol=1,nrow=nrow(sknot2));colnames(sparasli2)<-
'parameter asli'
    sparasli3=matrix(ncol=1,nrow=nrow(sknot3));colnames(sparasli3)<-
'parameter asli'
    sparasli1[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(4+ksearch),(7+ksearch)),]=aa$spar1

```

```
sparasli2[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(5+ksearch),(7+ksearch):(8+ksearch))]=aa$sp
ar2
```

```
sparasli3[c(1:(2+k1[k]),(3+ksearch):(6+ksearch),(7+ksearch):(9+ksearch))]=aa$sp
ar3
```

```
rk1=cbind((sparasli1),(sknot1));rknon1=cbind((sparasli1),(sknotnon1));
rk2=cbind((sparasli2),(sknot2));rknon2=cbind((sparasli2),(sknotnon2))
rk3=cbind((sparasli3),(sknot3));rknon3=cbind((sparasli3),(sknotnon3))
rk11=rbind(sh1,rk1);rknon11=rbind(shnon1,rknon1);
rk22=rbind(sh2,rk2);rknon22=rbind(shnon2,rknon2);
rk33=rbind(sh3,rk3);rknon33=rbind(shnon3,rknon3);
write.csv(rk11,file=paste(name,"K = ",k1[k]," save_result_knot 1
v=",v,'n=',n[j],'var=',vari[i],".csv"))
write.csv(rknon11,file=paste(name,"K = ",k1[k]," save_result_non optimum_knot
1 v=",v,'n=',n[j],'var=',vari[i],".csv"))
write.csv(rk22,file=paste(name,"K = ",k1[k]," save_result_knot 2
v=",v,'n=',n[j],'var=',vari[i],".csv"))
write.csv(rknon22,file=paste(name,"K = ",k1[k]," save_result_non optimum_knot
2 v=",v,'n=',n[j],'var=',vari[i],".csv"))
write.csv(rk33,file=paste(name,"K = ",k1[k]," save_result_knot 3
v=",v,'n=',n[j],'var=',vari[i],".csv"))
write.csv(rknon33,file=paste(name,"K = ",k1[k]," save_result_non optimum_knot
3 v=",v,'n=',n[j],'var=',vari[i],".csv"))
cat(" knot 1 replikasi "," \n")
print(rk11)
cat(" knot 1 non optimum replikasi "," \n")
print(rknon11)
cat(" knot 2 replikasi "," \n")
print(rk22)
cat(" knot 2 non optimum replikasi "," \n")
print(rknon22)
cat(" knot 3 replikasi "," \n")
print(rk33)
cat(" knot 3 non optimum replikasi "," \n")
print(rknon33)
}
}
}
}
```

```
random=function(n,vari,k,v,u,name)
{
library(plot3D)
#windows()
stdev_error=sqrt(vari)
x1=c(1:n)
x2=((runif(n,0,1)))
```

```

mx2=mean(x2)
medx2=median(x2)
q1x2=quantile(x2,0.25)
q3x2=quantile(x2,0.75)
while ((mx2<(0.4999)) | (mx2>0.5001))|(medx2<(0.49)) | (medx2>0.51)
      |((q1x2<(0.24)) | (q1x2>0.26))|(q3x2<(0.74)) | (q3x2>0.76))
{
  x2=((runif(n,0,1)))
  mx2=mean(x2)
  medx2=median(x2)
  q1x2=quantile(x2,0.25)
  q3x2=quantile(x2,0.75)
  #print(summary(x2))
}
aa=c(1:n)
dat=cbind(x1,x2)
x11=sample(aa,n)
dat1=matrix(nrow=n,ncol=2)
for (i in 1:n)
{
  dat1[i,]=dat[x11[i],]
}
x1=(dat1[,1])
x2=dat1[,2]
grid_er=matrix(rnorm((n*n),0,stdev_error),ncol=n,nrow=n)
mgrid_er=mean(grid_er)
while ((mgrid_er<(-0.00001)) | (mgrid_er>0.00001))
{
  grid_er=matrix(rnorm((n*n),0,stdev_error),ncol=n,nrow=n)
  mgrid_er=mean(grid_er)
}
er=matrix(diag(grid_er),ncol=1)

#-----
g1=fgrid(k,v,u,x1,x2)$g1
g2=fgrid(k,v,u,x1,x2)$g2
f=cbind(g1,g2,er)
mypath <- file.path(paste(name,"K_asli=",k," plot_Data_v=",v," _u=",u,".jpg", sep =
""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=690)
par(mfrow=c(2,2))
y=g1+g2+er
plot(x1,g1,col="red",ylab="f(x1)",xlab="x1")
plot(x2,g2,col="red",ylab="f(x2)",xlab="x2")
plot(x1,y,col="red",ylab="y",xlab="x1")
plot(x2,y,col="red",ylab="y",xlab="x2")
dev.off()
par(mfrow=c(1,1))
data=cbind(y,x1,x2)

```

```

grid=mesh(sort(x1),sort(x2))
grid_x1=grid$x
grid_x2=grid$y

z=as.matrix(with(grid, fgrid(k,v,u,x,y)$y+grid_er))
#z=as.matrix(with(grid, (cos(x))-y*(1-y)+grid_er))
rownames(z)<-sort(x1)
colnames(z)<-sort(x2)
#random data untuk plot
xx1=seq(0,10,by=0.05)
xx2=seq(0,1,by=0.005)

grid_er2=matrix(rnorm((length(xx1)*length(xx2)),0,stdev_error),ncol=length(xx2),
nrow=length(xx1))
mgrid_er2=mean(grid_er2)
while ((mgrid_er2<(-0.00001)) | (mgrid_er2>0.00001))
{

grid_er2=matrix(rnorm((length(xx1)*length(xx2)),0,stdev_error),ncol=length(xx1),
nrow=length(xx2))
mgrid_er2=mean(grid_er2)
}
er2=matrix(diag(grid_er2),ncol=1)
gg1=(cos(xx1))
gg2=-xx2*(1-xx2)
grid2=mesh(sort(xx1),sort(xx2))
grid_xx1=grid2$x
grid_xx2=grid2$y
z2=as.matrix(with(grid2, fgrid(k,v,u,x,y)$y +grid_er2))
rownames(z2)<-sort(xx1)
colnames(z2)<-sort(xx2)
write.csv(grid_xx1,file=paste(name,"K_asli = ",k,"
data_grid_x1_small_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(grid_xx2,file=paste(name,"K_asli = ",k,"
data_grid_x2_small_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(z2,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_grid_y_small_v=",v,"_u=",u,".csv"))
##
write.csv(grid_x1,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_grid_x1_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(grid_x2,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_grid_x2_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(z,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_grid_y_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(f,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_fungsi_random_fourier-
Spline_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(data,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_random_fourier-
Spline_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(er,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_error_fourier-
Spline_v=",v,"_u=",u,".csv"))
write.csv(dat,file=paste(name,"K_asli = ",k," data_random_sort_v=",v,"_u=",u,".csv"))
return(data)
}

```

```

fgrid=function(k,v,u,x1,x2)
{ #fungsi grid untuk plot 3 dimensi
  x1=as.matrix(x1);x2=as.matrix(x2)
  n=nrow(x1);m=ncol(x1)
  if (k==1) g1=(2*x1+0.5+7*cos((x1*(2*pi)/n))) else if (k==2)
g1=(2*x1+0.5+7*cos((x1*(2*pi)/n))+10*cos(2*(x1*(2*pi)/n))) else if (k==3)

g1=(2*x1+0.5+5*cos((x1*(2*pi)/n))+10*cos(2*(x1*(2*pi)/n))+13*cos(3*(x1*(2*pi)
/n))) else if (k==5)
  g1=(0.1*x1+0.5+0.9*cos((x1*(2*pi)/n))-
0.4*cos(2*(x1*(2*pi)/n))+0.1*cos(3*(x1*(2*pi)/n))-
1.2*cos(4*(x1*(2*pi)/n))+2.1*cos(5*(x1*(2*pi)/n))) else
  g1=(0.1*x1+0.5+0.9*cos((x1*(2*pi)/n))-
0.4*cos(2*(x1*(2*pi)/n))+0.1*cos(3*(x1*(2*pi)/n))-
1.2*cos(4*(x1*(2*pi)/n))+2.1*cos(5*(x1*(2*pi)/n))+
  3.3*cos(6*(x1*(2*pi)/n))-
2.1*cos(7*(x1*(2*pi)/n))+0.2*cos(8*(x1*(2*pi)/n))+4*cos(9*(x1*(2*pi)/n))-
0.5*cos(10*(x1*(2*pi)/n)))

  if (v==1) {g21=10*x2
  #if (u==1) knot=matrix(c(0.2,0,0),nrow=3,ncol=1) else if (u==2)
knot=matrix(c(0.2,0.5,0),nrow=3,ncol=1) else
knot=matrix(c(0.2,0.5,0.8),nrow=3,ncol=1);
  if (u==1) knot=matrix(c(0.45,0,0),nrow=3,ncol=1) else if (u==2)
knot=matrix(c(0.33,0.66,0),nrow=3,ncol=1) else
knot=matrix(c(0.25,0.525,0.8),nrow=3,ncol=1);
  g22_1=as.matrix(x2-knot[1]); g22_2=as.matrix(x2-knot[2]); g22_3=as.matrix(x2-
knot[3])
  for (i in 1:n)
  for (j in 1:m)
  {
    if(x2[i,j]<knot[1])(g22_1[i,j]=0)else g22_1[i,j]=g22_1[i,j]^v
    if(x2[i,j]<knot[2])(g22_2[i,j]=0)else g22_2[i,j]=g22_2[i,j]^v
    if(x2[i,j]<knot[3])(g22_3[i,j]=0)else g22_3[i,j]=g22_3[i,j]^v
  }
  if (u==1) (g22=(3*g22_1)) else if (u==2) g22=(3*g22_1)+(7*g22_2) else
g22=(3*g22_1)+(7*g22_2)+(5*g22_3)
} else if (v==2) {(g21=4*x2+6*x2^2)
  if (u==1) knot=matrix(c(0.1,0,0),nrow=3,ncol=1) else if (u==2)
knot=matrix(c(0.1,0.5,0),nrow=3,ncol=1) else
knot=matrix(c(0.1,0.5,0.9),nrow=3,ncol=1);
  g22_1=as.matrix(x2-knot[1]); g22_2=as.matrix(x2-knot[2]); g22_3=as.matrix(x2-
knot[3])
  for (i in 1:n)
  for (j in 1:m)
  {
    if(x2[i,j]<knot[1])(g22_1[i,j]=0)else g22_1[i,j]=g22_1[i,j]^v
    if(x2[i,j]<knot[2])(g22_2[i,j]=0)else g22_2[i,j]=g22_2[i,j]^v
  }
}
}

```



```

    if(x2[i,j]<knot[3])(g22_3[i,j]=0)else g22_3[i,j]=g22_3[i,j]^v
  }
  if (u==1) (g22=(2*g22_1)) else if (u==2) g22=(2*g22_1)+(-3*g22_2) else
g22=(2*g22_1)+(-3*g22_2)+(5*g22_3)
} else {(g21=0.1*x2+0.3*x2^2+0.5*x2^3)
  if (u==1) knot=matrix(c(0.2,0,0),nrow=3,ncol=1) else if (u==2) knot=matrix(c(-
0.4,0.4,0),nrow=3,ncol=1) else knot=matrix(c(-0.6,0.1,0.5),nrow=3,ncol=1);
  g22_1=as.matrix(x2-knot[1]); g22_2=as.matrix(x2-knot[2]); g22_3=as.matrix(x2-
knot[3])
  for (i in 1:n)
    for (j in 1:m)
      {
        if(x2[i,j]<knot[1])(g22_1[i,j]=0)else g22_1[i,j]=g22_1[i,j]^v
        if(x2[i,j]<knot[2])(g22_2[i,j]=0)else g22_2[i,j]=g22_2[i,j]^v
        if(x2[i,j]<knot[3])(g22_3[i,j]=0)else g22_3[i,j]=g22_3[i,j]^v
      }
  if (u==1) (g22=(5*g22_1)) else if (u==2) g22=(5*g22_1)+(-7*g22_2) else
g22=(5*g22_1)+(-7*g22_2)+(4*g22_3)
}
g2=g21+g22
fgrid=g1+g2
list(y=fgrid,g1=g1,g2=g2)
}

fungsik=function(k,xfour)
{#fungsi untuk mencari D dan W pada fourier
  fou1=as.matrix(xfour)
  #n=length(fou1)
  n=length(fou1)
  if ( n>201) n=sqrt(length(fou1)) else n=length(fou1)
  fou2=rep(0.5,length(xfour))
  fouk=matrix(ncol=k,nrow=nrow(fou1))
  for (i in 1:k)
    { fouk[i]=cos(i*(fou1*(2*pi)/n)) }
  # { fouk[i]=cos(i*fou1) }
  W=cbind(fou1,fou2,fouk)
  cc=mat.or.vec(nc=1,nr=k+2)
  cc[1]=0;cc[2]=0
  for (i in 1:k)
    { cc[i+2]=i^4 }
  D=diag(cc)
  list(D=D,W=W)
}

GCV1k1=function(data,kf,v,name,kasli)
{
  options(digits=6)
  nf=1
  library(Matrix)

```

```

library(pracma)
data=as.matrix(data)
y=as.matrix(data[,1])
x=as.matrix(data[, -1])
n=nrow(y)
m=ncol(x)
dataA=as.matrix(x[, (nf+1):m])
if (v==1) (dataAA=dataA) else if (v==2) dataAA=cbind(dataA,dataA^2) else
dataAA=cbind(dataA,dataA^2,dataA^3)
nk=27 #banyak patahan (knot)
nl=100 #banyak patahan lambda
m1=m-nf #m1=banyaknya non parametrik
knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
for (i in (1:m1))
{
  for (j in (1:nk))
  {
    if (v==1) {a=seq(0.425,0.475,length.out=nk)
    } else if (v==2) {a=seq(0.05,0.15,length.out=nk)
    }else {a=seq(0,0.2,length.out=nk)}
    knot1[j,i]=a[j]
  }
}
knot1=as.matrix(knot1[2:(nk-1),])
aa=rep(1,n)
data1=matrix(ncol=m1,nrow=n)#in akan menjadi X
#persamaan deret fourier
der=funksik(kf,x[,1:nf])
W=der$W
D=der$D

a2=nk-2
nprint=(min(25,a2))
temp1=c()
for ( i in 1:8)
{
  temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(0.5*10^(-(1+i))))
  temp1=c(temp1,temp0)
}
lambda1=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.11,1,by=0.01),temp1))))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^-
3,by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002),seq(0.03,10^-0,by=0.005)))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-6),10^-3,by=0.00002),seq(10^(-3),10^-
2,by=0.0002),seq(0.03,10^-0,by=0.02)))
nl=length(lambda1)
GCV=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
MSE=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
Rsqr=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
SSE=matrix(nrow=a2,ncol=nl)

```

```

SST=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
SSR=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-lambda1;colnames(MSE)<-
lambda1;colnames(Rsq)<-lambda1
for(i in 1:a2)
{
  lambda=rbind(lambda,t(lambda1))
}
lambda=lambda[-1,]
for (i in 1:a2)
{
  for (j in 1:m1)
  {
    for (k in 1:n)
    {
      if (x[k,(j+1)]<knot1[i,j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,(j+1)]-knot1[i,j]
    }
  }
  satu=rep(1,n)
  X=cbind(dataAA,data1^v)
  I1=diag(ncol(X))
  I2=diag(nrow(X))
  for (j in 1:nl)
  {
    Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambda[i,j]*D)
    B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
    B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
    B3=B1)%*%B2
    A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
    C=W)%*%A1+X)%*%B3
    yhat=C)%*%y
    SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2)
    SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2)
    SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j]
    Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100
    MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n
    GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
    GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh
  }
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

R11=matrix(Rsq,ncol=1); colnames(R11)<-"Rsq"
L11=matrix(lambda,ncol=1); colnames(L11)<-"Lambda"
MSE11=matrix(MSE,ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(GCV,ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(rep(1:a2,nl),ncol=1); colnames(ke11)<-"Knot ke"
knot11=matrix(nrow=(a2*nl),ncol=ncol(knot1))

```

```

for (i in 1:nl)
{ knot11[(i*a2-(a2-1)):(i*a2),]=(knot1) }
gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11
dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
s1=min(gab11copy[,1])
pos=which(s1==gab11copy[,1])
if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
posdellambda=which(gab11copy[pos,4]==gab11copy[,4])
posdelknot =which(gab11copy[pos,5]==gab11copy[,5])
gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
#gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda),]
}

#untuk non optimum
gab12copy=gab11
dataprintmax=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab12copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
s2=max(gab12copy[,1])
pos=which(s2==gab12copy[,1])
if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
dataprintmax[i,]=gab12copy[pos,]
posdellambda=which(gab12copy[pos,4]==gab12copy[,4])
posdelknot =which(gab12copy[pos,5]==gab12copy[,5])
gab12copy=gab12copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
#gab12copy=gab12copy[-c(posdellambda),]
}

dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,5]),]
dataprintmax=dataprintmax[order(-dataprintmax[,1],dataprintmax[,2],-
dataprintmax[,3],-dataprintmax[,5]),]

dataprint1=as.matrix(dataprint[,1]);colnames(dataprint1)<-"GCV"
dataprint2=as.matrix(dataprint[,2]);colnames(dataprint2)<-"Rsq"
dataprint3=as.matrix(dataprint[,3]);colnames(dataprint3)<-"MSE"
dataprint4=as.matrix(dataprint[,4]);colnames(dataprint4)<-"Lambda"
dataprint5=as.matrix(dataprint[,5]);colnames(dataprint5)<-"knot_ke"
dataprintmax1=as.matrix(dataprintmax[,1]);colnames(dataprintmax1)<-"GCV"
dataprintmax2=as.matrix(dataprintmax[,2]);colnames(dataprintmax2)<-"Rsq"
dataprintmax3=as.matrix(dataprintmax[,3]);colnames(dataprintmax3)<-"MSE"
dataprintmax4=as.matrix(dataprintmax[,4]);colnames(dataprintmax4)<-"Lambda"
dataprintmax5=as.matrix(dataprintmax[,5]);colnames(dataprintmax5)<-"knot_ke"

```

```

dataprint=cbind(dataprint1,dataprint2,dataprint3,dataprint4,dataprint5,dataprint[,
6:ncol(dataprint)])

dataprintmax=cbind(dataprintmax1,dataprintmax2,dataprintmax3,dataprintmax4,d
ataprintmax5,dataprintmax[,6:ncol(dataprintmax)])
write.csv(gab11,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output data All
1 knot v=",v,".csv"))
write.csv(dataprint,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output data
yang di print optimum 1 knot v=",v,".csv"))
write.csv(dataprintmax,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output
data yang di print non optimum 1 knot v=",v,".csv"))

cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline 1 knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE    =",dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprint[1,4], "\n")
cat("Knot   =",dataprint[1,6:ncol(dataprint)], "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprint)

cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV non optimum dengan fourier-Spline 1 knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprintmax[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprintmax[1,2], "\n")
cat("MSE    =",dataprintmax[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprintmax[1,4], "\n")
cat("Knot   =",dataprintmax[1,6:ncol(dataprintmax)], "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprintmax)

pos=which(dataprint[1,1]==gab11[1,1]); if (length(pos)==1) pos=pos else
pos=randsample(pos,1)
#posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[5])
posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,(length(posknot)-pos2)))
lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("knot1 optimum k=",kf))

```

```

lg=cbind(lambdaplot,gcvplot)
posmin=which(min(gcvplot)==gcvplot)
datamin=as.matrix(lg[posmin,])
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],y1=-100)
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],x1=-100)
text(datamin[1],datamin[2],paste0(round(datamin[2],4)),pos=3)
points(datamin[1],datamin[2],pch=19)

pos=which(dataprintmax[1,1]==gab11[,1]); if (length(pos)==1) pos=pos else
pos=randsample(pos,1)
posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[,5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,(length(posknot)-pos2)))
lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("knot1 non optimum k=",kf))
lg=cbind(lambdaplot,gcvplot)
posmin=which(min(gcvplot)==gcvplot)
datamin=as.matrix(lg[posmin,])
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],y1=-100)
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],x1=-100)
text(datamin[1],datamin[2],paste0(round(datamin[2],4)),pos=3)
points(datamin[1],datamin[2],pch=19)

lambda1=dataprint[1,4]
lambdanon1=dataprintmax[1,4]
knotgcv=matrix(dataprint[1,6:ncol(dataprint)],nrow=1)
knotgcvnon=matrix(dataprintmax[1,6:ncol(dataprintmax)],nrow=1)
for (j in 1:m1)
{
  for (k in 1:n)
  {
    if (x[k,(j+1)]<knotgcv[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,(j+1)]-knotgcv[j]
  }
}
X=cbind(dataAA,data1^v)
for (j in 1:m1)
{
  for (k in 1:n)
  {
    if (x[k,(j+1)]<knotgcvnon[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,(j+1)]-
knotgcvnon[j]
  }
}
Xnon=cbind(dataAA,data1^v)

```

```

list(knot=knotgcv,knotnon=knotgcvnon,mingcv=dataprint[1,1],maxgcv=dataprintmax[1,1],Rsqgcvmax=dataprintmax[1,2],Rsqgcv=dataprint[1,2],W=W,X=X,Xnon=Xnon,lambda=lambda1,lambdanon=lambdanon1)
}

GCV2k1=function(data,kf,v,name,kasli)
{
  nf=1
  library(Matrix)
  library(pracma)
  data=as.matrix(data)
  y=as.matrix(data[,1])
  x=as.matrix(data[,-1])
  n=nrow(y)
  m=ncol(x)
  dataA=as.matrix(x[, (nf+1):m])
  if (v==1) (dataAA=dataA) else if (v==2) dataAA=cbind(dataA,dataA^2) else
dataAA=cbind(dataA,dataA^2,dataA^3)
  nk=8 #banyak patahan (knot)
  nl=100 # banyak patahan lambda
  m1=m-nf #m1=banyaknya non parametrik
  a1knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
  for (i in (1:m1))
  {
    for (j in (1:(nk)))
    {
      if (v==1) {a=seq(0.305,0.355,length.out=nk)}
      } else if (v==2) {a=seq(0.05,0.15,length.out=nk)}
      }else {a=seq(0,0.2,length.out=nk)}
      a1knot1[j,i]=a[j]
    }
  }
  a1knot=as.matrix(a1knot1[2:((nk)-1),])
  aa=rep(1,n)
  a2=nrow(a1knot)#a2=nk-2
  a2knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
  for (i in (1:m1))
  {
    for (j in (1:nk))
    {
      if (v==1) {a=seq(0.635,0.685,length.out=nk)}
      } else if (v==2) {a=seq(0.45,0.55,length.out=nk)}
      }else {a=seq(0,0.2,length.out=nk)}
      a2knot1[j,i]=a[j]
    }
  }
  a2knot=as.matrix(a2knot1[2:((nk)-1),])
  #z=(a2*(a2-1)/2)

```

```

z=(a2)^2
knot2=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:m1))
{
  knot1=rbind(rep(NA,2))
  for (j in 1:(a2))
  {
    for (k in 1:a2)
    {
      xx=cbind(a1knot[j,i],a2knot[k,i])
      knot1=rbind(knot1,xx)
    }
  }
  knot2=cbind(knot2,knot1)
}
knot2=knot2[2:(z+1),2:(2*m1+1)]
a3=nrow(knot2)
nprint=(min(25,a3))
aa=rep(1,n)
data1=matrix(ncol=2*m1,nrow=n)#in akan menjadi X
#persamaan deret fourier
der=funksik(kf,x[,1:nf])
W=der$W
D=der$D
  temp1=c()
  for (i in 1:8)
  {
    temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(0.5*10^(-(1+i))))
    temp1=c(temp1,temp0)
  }
  lambda1=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.11,1,by=0.01),temp1))))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^(-3),by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002),seq(0.03,10^-0,by=0.005)))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-6),10^-3,by=0.00002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002),seq(0.03,10^-0,by=0.02)))
nl=length(lambda1)
GCV=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
MSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
Rsqr=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SST=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSR=matrix(nrow=a3,ncol=nl)

lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-lambda1;colnames(MSE)<-
lambda1;colnames(Rsqr)<-lambda1
for(i in 1:a3)
{
  lambda=rbind(lambda,t(lambda1))
}

```



```

lambda=lambda[-1,]
for (i in 1:a3)
{
  for (j in 1:(2*m1))
  {
    if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
    for (k in 1:n)
    {
      if (x[k,b+1]<knot2[i,j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,b+1]-knot2[i,j]
    }
  }
  satu=rep(1,n)
  X=cbind(dataAA,data1^v)
  I1=diag(ncol(X))
  I2=diag(nrow(X))
  for (j in 1:nl)
  {
    Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambda[i,j]*D)
    B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
    B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
    B3=B1)%*%B2
    A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
    C=W)%*%A1+X)%*%B3
    yhat=C)%*%y
    SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2)
    SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2)
    SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j]
    Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100
    MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n
    GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
    GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh
  }
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

R11=matrix(Rsq,ncol=1); colnames(R11)<-"Rsq"
L11=matrix(lambda,ncol=1); colnames(L11)<-"Lambda"
MSE11=matrix(MSE,ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(GCV,ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(rep(1:a3,nl),ncol=1); colnames(ke11)<-"Knot ke"
knot11=matrix(nrow=(a3*nl),ncol=ncol(knot2))
for (i in 1:nl)
{ knot11[(i*a3-(a3-1)):(i*a3),]=(knot2) }
gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11
dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)

```

```

{
  s1=min(gab11copy[,1])
  pos=which(s1==gab11copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
  posdellambda=which(gab11copy[pos,4]==gab11copy[,4])
  posdelknot =which(gab11copy[pos,5]==gab11copy[,5])
  gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
#non
gab12copy=gab11
dataprintnon=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab12copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  s2=max(gab12copy[,1])
  pos=which(s2==gab12copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprintnon[i,]=gab12copy[pos,]
  posdellambda=which(gab12copy[pos,4]==gab12copy[,4])
  posdelknot =which(gab12copy[pos,5]==gab12copy[,5])
  gab12copy=gab12copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,5]),]
dataprintnon=dataprintnon[order(-dataprintnon[,1],dataprintnon[,2],-
dataprintnon[,3],-dataprintnon[,5]),]

dataprint1=as.matrix(dataprint[,1]);colnames(dataprint1)<-"GCV"
dataprint2=as.matrix(dataprint[,2]);colnames(dataprint2)<-"Rsq"
dataprint3=as.matrix(dataprint[,3]);colnames(dataprint3)<-"MSE"
dataprint4=as.matrix(dataprint[,4]);colnames(dataprint4)<-"Lambda"
dataprint5=as.matrix(dataprint[,5]);colnames(dataprint5)<-"knot_ke"

dataprint=cbind(dataprint1,dataprint2,dataprint3,dataprint4,dataprint5,dataprint[,
6:ncol(dataprint)])
dataprintnon1=as.matrix(dataprintnon[,1]);colnames(dataprintnon1)<-"GCV"
dataprintnon2=as.matrix(dataprintnon[,2]);colnames(dataprintnon2)<-"Rsq"
dataprintnon3=as.matrix(dataprintnon[,3]);colnames(dataprintnon3)<-"MSE"
dataprintnon4=as.matrix(dataprintnon[,4]);colnames(dataprintnon4)<-"Lambda"
dataprintnon5=as.matrix(dataprintnon[,5]);colnames(dataprintnon5)<-"knot_ke"

dataprintnon=cbind(dataprintnon1,dataprintnon2,dataprintnon3,dataprintnon4,dat
aprintnon5,dataprintnon[,6:ncol(dataprintnon)])
write.csv(gab11,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output data All
2 knot v=",v,".csv"))
write.csv(dataprint,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output data
yang di print optimum 2 knot v=",v,".csv"))
write.csv(dataprintnon,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output
data yang di print non optimum 2 knot v=",v,".csv"))

```

```

cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline 2 knot k=", kf, "\n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =", dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare =", dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE   =", dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda =", dataprint[1,4], "\n")
cat("Knot   =", dataprint[1,6:ncol(dataprint)], "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprint)
cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV non optimum dengan fourier-Spline 2 knot k=", kf, "\n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =", dataprintnon[1,1], "\n")
cat("Rsquare =", dataprintnon[1,2], "\n")
cat("MSE   =", dataprintnon[1,3], "\n")
cat("Lambda =", dataprintnon[1,4], "\n")
cat("Knot   =", dataprintnon[1,6:ncol(dataprintnon)], "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprintnon)

pos=which(dataprint[1,1]==gab11[1,1]); if (length(pos)==1) pos=pos else
pos=randsample(pos,1)
posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[5,5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,(length(posknot)-pos2)))
lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("knot2 optimum k=",kf))
lg=cbind(lambdaplot,gcvplot)
posmin=which(min(gcvplot)==gcvplot)
datamin=as.matrix(lg[posmin,])
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],y1=-100)
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],x1=-100)
text(datamin[1],datamin[2],paste0(round(datamin[2],4)),pos=3)
points(datamin[1],datamin[2],pch=19)

pos=which(dataprintnon[1,1]==gab11[1,1]); if (length(pos)==1) pos=pos else
pos=randsample(pos,1)
posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[5,5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,(length(posknot)-pos2)))

```

```

lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("knot2 non optimum k=",kf))
lg=cbind(lambdaplot,gcvplot)
posmin=which(min(gcvplot)==gcvplot)
datamin=as.matrix(lg[posmin,])
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],y1=-100)
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],x1=-100)
text(datamin[1],datamin[2],paste0(round(datamin[2],4)),pos=3)
points(datamin[1],datamin[2],pch=19)

lambda1=dataprint[1,4]
lambdanon1=dataprintnon[1,4]
knotgcv=matrix(dataprint[1,6:ncol(dataprint)],nrow=1)
knotgcvnon=matrix(dataprintnon[1,6:ncol(dataprintnon)],nrow=1)
for (j in 1:(2*m1))
{
  if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
  for (k in 1:n)
  {
    if (x[k,b+1]<knotgcv[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,b+1]-knotgcv[j]
  }
}
X=cbind(dataAA,data1^v)
for (j in 1:(2*m1))
{
  if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
  for (k in 1:n)
  {
    if (x[k,b+1]<knotgcvnon[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,b+1]-knotgcvnon[j]
  }
}
Xnon=cbind(dataAA,data1^v)

list(knot=knotgcv,knotnon=knotgcvnon,mingcv=dataprint[1,1],maxgcv=dataprintno
n[1,1],Rsqugcv=dataprint[1,2],Rsqugcvnon=dataprintnon[1,2],W=W,X=X,Xnon=Xnon,l
ambda=lambda1,lambdanon=lambdanon1)
}

GCV3k1=function(data,kf,v,name,kasli)
{
  nf=1
  library(Matrix)
  library(pracma)
  data=as.matrix(data)
  y=as.matrix(data[,1])
  x=as.matrix(data[,-1])

```

```

n=nrow(y)
m=ncol(x)
dataA=as.matrix(x[, (nf+1):m])
if (v==1) (dataAA=dataA) else if (v==2) dataAA=cbind(dataA,dataA^2) else
dataAA=cbind(dataA,dataA^2,dataA^3)
nk=8 #banyak patahan (knot)
nl=100 # banyak patahan lambda
m1=m-nf #m1=banyaknya non parametrik
a1knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
for (i in (1:m1))
{
  for (j in (1:(nk)))
  {
    if (v==1) {a=seq(0.225,0.275,length.out=nk)
    } else if (v==2) {a=seq(0.05,0.15,length.out=nk)
    }else {a=seq(0,0.2,length.out=nk)}
    a1knot1[j,i]=a[j]
  }
}
a1knot=as.matrix(a1knot1[2:((nk)-1),])
aa=rep(1,n)
a2=nrow(a1knot)#a2=nk-2
a2knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
for (i in (1:m1))
{
  for (j in (1:nk))
  {
    if (v==1) {a=seq(0.5,0.55,length.out=nk)
    } else if (v==2) {a=seq(0.45,0.55,length.out=nk)
    }else {a=seq(0,0.2,length.out=nk)}
    a2knot1[j,i]=a[j]
  }
}
a2knot=as.matrix(a2knot1[2:((nk)-1),])
a3knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
for (i in (1:m1))
{
  for (j in (1:nk))
  {
    if (v==1) {a=seq(0.775,0.825,length.out=nk)
    } else if (v==2) {a=seq(0.85,0.95,length.out=nk)
    }else {a=seq(0,0.2,length.out=nk)}
    a3knot1[j,i]=a[j]
  }
}
a3knot=as.matrix(a3knot1[2:((nk)-1),])

#z=(a2*(a2-1)*(a2-2)/6)
z=(a2)^3

```

```

knot1=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:m1))
{
  knot2=rbind(rep(NA,3))
  for (j in 1:(a2))
  {
    for (k in (1):(a2))
    {
      for (g in (1):a2)
      {
        xx=cbind(a1knot[j,i],a2knot[k,i],a3knot[g,i])
        knot2=rbind(knot2,xx)
      }
    }
  }
  knot1=cbind(knot1,knot2)
}
knot1=knot1[2:(z+1),2:(3*m1+1)]
a3=nrow(knot1)
nprint=(min(25,a3))
aa=rep(1,n)
data1=matrix(ncol=3*m1,nrow=n)#in akan menjadi X
#persamaan deret fourier
der=funksik(kf,x[,1:nf])
W=der$W
D=der$D
temp1=c()
for ( i in 1:8)
{
  temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(0.5*10^(-(1+i))))
  temp1=c(temp1,temp0)
}
lambda1=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.11,1,by=0.01),temp1))))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^-
3,by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002),seq(0.03,10^-0,by=0.005)))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-6),10^-3,by=0.00002),seq(10^(-3),10^-
2,by=0.0002),seq(0.03,10^-0,by=0.02)))
nl=length(lambda1)
GCV=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
MSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
Rsqr=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SST=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSR=matrix(nrow=a3,ncol=nl)

lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-lambda1;colnames(MSE)<-
lambda1;colnames(Rsqr)<-lambda1
for(i in 1:a3)
{

```

```

lambda=rbind(lambda,t(lambda1))
}
lambda=lambda[-1,]
for (i in 1:a3)
{
  for (j in 1:ncol(knot1))
  {
    b=ceiling(j/3)
    for (k in 1:n)
    {
      if (x[k,b+1]<knot1[i,j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,b+1]-knot1[i,j]
    }
  }
}

satu=rep(1,n)
X=cbind(dataAA,data1^v)
I1=diag(ncol(X))
I2=diag(nrow(X))
for (j in 1:nl)
{
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambda[i,j]*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1)%*%B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
  C=W)%*%A1+X)%*%B3
  yhat=C)%*%y
  SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2)
  SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2)
  SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j]
  Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100
  MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n
  GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
  GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh
}
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)
R11=matrix(Rsq,ncol=1); colnames(R11)<-"Rsq"
L11=matrix(lambda,ncol=1); colnames(L11)<-"Lambda"
MSE11=matrix(MSE,ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(GCV,ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(rep(1:a3,nl),ncol=1); colnames(ke11)<-"Knot ke"
knot11=matrix(nrow=(a3*nl),ncol=ncol(knot1))
for (i in 1:nl)
{ knot11[(i*a3-(a3-1)):(i*a3),]=(knot1) }
gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11

```

```

dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  s1=min(gab11copy[,1])
  pos=which(s1==gab11copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
  posdellambda=which(gab11copy[pos,4]==gab11copy[,4])
  posdelknot =which(gab11copy[pos,5]==gab11copy[,5])
  gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
#non
gab12copy=gab11
dataprintnon=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab12copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  s2=max(gab12copy[,1])
  pos=which(s2==gab12copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprintnon[i,]=gab12copy[pos,]
  posdellambda=which(gab12copy[pos,4]==gab12copy[,4])
  posdelknot =which(gab12copy[pos,5]==gab12copy[,5])
  gab12copy=gab12copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,5]),]
dataprintnon=dataprintnon[order(-dataprintnon[,1],dataprintnon[,2],-
dataprintnon[,3],-dataprintnon[,5]),]

dataprint1=as.matrix(dataprint[,1]);colnames(dataprint1)<-"GCV"
dataprint2=as.matrix(dataprint[,2]);colnames(dataprint2)<-"Rsq"
dataprint3=as.matrix(dataprint[,3]);colnames(dataprint3)<-"MSE"
dataprint4=as.matrix(dataprint[,4]);colnames(dataprint4)<-"Lambda"
dataprint5=as.matrix(dataprint[,5]);colnames(dataprint5)<-"knot_ke"

dataprint=cbind(dataprint1,dataprint2,dataprint3,dataprint4,dataprint5,dataprint[,
6:ncol(dataprint)])
dataprintnon1=as.matrix(dataprintnon[,1]);colnames(dataprintnon1)<-"GCV"
dataprintnon2=as.matrix(dataprintnon[,2]);colnames(dataprintnon2)<-"Rsq"
dataprintnon3=as.matrix(dataprintnon[,3]);colnames(dataprintnon3)<-"MSE"
dataprintnon4=as.matrix(dataprintnon[,4]);colnames(dataprintnon4)<-"Lambda"
dataprintnon5=as.matrix(dataprintnon[,5]);colnames(dataprintnon5)<-"knot_ke"

dataprintnon=cbind(dataprintnon1,dataprintnon2,dataprintnon3,dataprintnon4,dat
aprintnon5,dataprintnon[,6:ncol(dataprintnon)])

```



```

write.csv(gab11,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output data All
3 knot v=",v,".csv"))
write.csv(dataprint,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output data
yang di print optimum 3 knot v=",v,".csv"))
write.csv(dataprintnon,file=paste(name,"K_asli=",kasli,"K_estimate = ",kf," output
data yang di print non optimum 3 knot v=",v,".csv"))

cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline 3 knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE   =",dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprint[1,4], "\n")
cat("Knot   =",dataprint[1,6:ncol(dataprint)], "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprint)

cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV non optimum dengan fourier-Spline 3 knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprintnon[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprintnon[1,2], "\n")
cat("MSE   =",dataprintnon[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprintnon[1,4], "\n")
cat("Knot   =",dataprintnon[1,6:ncol(dataprintnon)], "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprintnon)

pos=which(dataprint[1,1]==gab11[1,1]); if (length(pos)==1) pos=pos else
pos=randsample(pos,1)
posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[5,5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,(length(posknot)-pos2)))
lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("knot3 optimum k=",kf))
lg=cbind(lambdaplot,gcvplot)
posmin=which(min(gcvplot)==gcvplot)
datamin=as.matrix(lg[posmin,])
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],y1=-100)
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],x1=-100)
text(datamin[1],datamin[2],paste0(round(datamin[2],4)),pos=3)
points(datamin[1],datamin[2],pch=19)

```

```

pos=which(dataprintnon[1,1]==gab11[,1]); if (length(pos)==1) pos=pos else
pos=randsample(pos,1)
posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[,5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,(length(posknot)-pos2)))
lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("knot3 non optimum k=",kf))
lg=cbind(lambdaplot,gcvplot)
posmin=which(min(gcvplot)==gcvplot)
datamin=as.matrix(lg[posmin,])
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],y1=-100)
segments(x0=datamin[1],y0=datamin[2],x1=-100)
text(datamin[1],datamin[2],paste0(round(datamin[2],4)),pos=3)
points(datamin[1],datamin[2],pch=19)

lambda1=dataprint[1,4]
knotgcv=matrix(dataprint[1,6:ncol(dataprint)],nrow=1)
lambdanon1=dataprintnon[1,4]
knotgcvnon=matrix(dataprintnon[1,6:ncol(dataprintnon)],nrow=1)

for (j in 1:ncol(knot1))
{
b=ceiling(j/3)
for (k in 1:n)
{
if (x[k,b+1]<knotgcv[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,b+1]-knotgcv[j]
}
}
X=cbind(dataAA,data1^v)
for (j in 1:ncol(knot1))
{
b=ceiling(j/3)
for (k in 1:n)
{
if (x[k,b+1]<knotgcvnon[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,b+1]-knotgcvnon[j]
}
}
Xnon=cbind(dataAA,data1^v)

list(knot=knotgcv,knotnon=knotgcvnon,mingcv=dataprint[1,1],maxgcv=dataprintno
n[1,1],Rsqgcv=dataprint[1,2],Rsqgcvnon=dataprintnon[1,2],W=W,X=X,Xnon=Xnon,l
ambda=lambda1,lambdanon=lambdanon1)
}

```

```

GCV=function(n,vari,index,kf,v,name,ksearch)
{
  index=0
  #data=> adalah data yang digunakan
  #index => isikan angka 0 jika data yang digunakan merupakan data simulasi
  #      dan isikan angka 1 jika yang digunakan merupakan data riil
  #kf   => adalah nilai k yang digunakan
  #v    => adalah fungsi spline yang digunakan 1 untuk linier, 2 kuadratik dan 3
kubik
  library(pracma)
  kasli=kf
  cat("\n","Nilai GCV untuk K=",kf,"\n","\n")
  data1=random(n,vari,kf,v,1,name)
  data2=random(n,vari,kf,v,2,name)
  data3=random(n,vari,kf,v,3,name)
  MminGCVk1=matrix(ncol=2,nrow=ksearch)
  MminGCVk2=matrix(ncol=2,nrow=ksearch)
  MminGCVk3=matrix(ncol=2,nrow=ksearch)
  for (i in 1:ksearch)
  {
    mypath <- file.path(paste(name,"K_asli = ",kasli," K_estimate = ",i," _knot asli 1
plot_.jpg", sep = ""))
    jpeg(file=mypath,width=1104,height=1104)
    par(mfrow=c(3,2))
      G1k1=GCV1k1(data1,i,v,name,kasli)
      G1k2=GCV2k1(data1,i,v,name,kasli)
      G1k3=GCV3k1(data1,i,v,name,kasli)
    dev.off()
      Mkknot1=(as.matrix(cbind(G1k1$mingcv,G1k2$mingcv,G1k3$mingcv)))
      MminGCVk1[i,1]=min(Mkknot1)
      MminGCVk1[i,2]=which(min(Mkknot1)==Mkknot1)

      mypath <- file.path(paste(name,"K_asli = ",kasli," K_estimate = ",i," _knot asli
2 plot_.jpg", sep = ""))
      jpeg(file=mypath,width=1104,height=1104)
      par(mfrow=c(3,2))
        G2k1=GCV1k1(data2,i,v,name,kasli)
        G2k2=GCV2k1(data2,i,v,name,kasli)
        G2k3=GCV3k1(data2,i,v,name,kasli)
      dev.off()
        Mkknot2=(as.matrix(cbind(G2k1$mingcv,G2k2$mingcv,G2k3$mingcv)))
        MminGCVk2[i,1]=min(Mkknot2)
        MminGCVk2[i,2]=which(min(Mkknot2)==Mkknot2)

        mypath <- file.path(paste(name,"K_asli = ",kasli," K_estimate = ",i," _knot asli
3 plot_.jpg", sep = ""))
        jpeg(file=mypath,width=1104,height=1104)
        par(mfrow=c(3,2))
        G3k1=GCV1k1(data3,i,v,name,kasli)

```

```

G3k2=GCV2k1(data3,i,v,name,kasli)
G3k3=GCV3k1(data3,i,v,name,kasli)
dev.off()
Mkknot3=(as.matrix(cbind(G3k1$mingcv,G3k2$mingcv,G3k3$mingcv)))
MminGCVk3[i,1]=min(Mkknot3)
MminGCVk3[i,2]=which(min(Mkknot3)==Mkknot3)
}
kmin1=which(min(MminGCVk1[,1],na.rm=T)==MminGCVk1[,1])
kmin2=which(min(MminGCVk2[,1],na.rm=T)==MminGCVk2[,1])
kmin3=which(min(MminGCVk3[,1],na.rm=T)==MminGCVk3[,1])
#kmin=2

#run ulang k dengan GCV minimum
knotmin1=MminGCVk1[kmin1,2]
knotmin2=MminGCVk2[kmin2,2]
knotmin3=MminGCVk3[kmin3,2]
par(mfrow=c(3,2))
if ( knotmin1==1)
  { G1k1=GCV1k1(data1,kmin1,v,name,kasli)} else if (
MminGCVk1[kmin1,2]==2) {G1k1=GCV2k1(data1,kmin1,v,name,kasli)} else
G1k1=GCV3k1(data1,kmin1,v,name,kasli)
if ( knotmin2==1)
  { G2k1=GCV1k1(data2,kmin2,v,name,kasli)} else if (
MminGCVk2[kmin2,2]==2) {G2k1=GCV2k1(data2,kmin2,v,name,kasli)} else
G2k1=GCV3k1(data2,kmin2,v,name,kasli)
if ( knotmin3==1)
  { G3k1=GCV1k1(data3,kmin3,v,name,kasli)} else if (
MminGCVk3[kmin3,2]==2) {G3k1=GCV2k1(data3,kmin3,v,name,kasli)} else
G3k1=GCV3k1(data3,kmin3,v,name,kasli)
G1k2=core(G1k1,data1,kmin1,1,v,name,index,kasli)
G2k2=core(G2k1,data2,kmin2,2,v,name,index,kasli)
G3k2=core(G3k1,data3,kmin3,3,v,name,index,kasli)

minGCVk1=min(as.matrix(cbind(G1k1$mingcv,G2k1$mingcv,G3k1$mingcv)));
if (minGCVk1==G1k1$mingcv) {
  W=G1k1$W ; X=G1k1$X;lambda=G1k1$lambda
;knot1=G1k1$knot;data=data1;u=1
  maxGCVk1=G1k1$maxgcv; k=kmin1
  Xnon=G1k1$Xnon;lambdaon=G1k1$lambdaon
;knotnon1=G1k1$knotnon;datanon=data1;unon=1
}else if (minGCVk1==G2k1$mingcv) {
  W=G2k1$W ; X=G2k1$X;lambda=G2k1$lambda
;knot1=G2k1$knot;data=data2;u=2
  maxGCVk1=G2k1$maxgcv;k=kmin2
  Xnon=G2k1$Xnon;lambdaon=G2k1$lambdaon
;knotnon1=G2k1$knotnon;datanon=data2;unon=2
}else {

```

```

W=G3k1$W ; X=G3k1$X;lambda=G3k1$lambda
;knot1=G3k1$knot;data=data3;u=3
  maxGCVk1=G3k1$maxgcv;k=kmin3
  Xnon=G3k1$Xnon;lambdaanon=G3k1$lambdaanon
;knotnon1=G3k1$knotnon;datanon=data3;unon=3
}

#save parameter & save knot
hkknott1=G1k1$knot ;hkknottnon1=G1k1$knotnon #hasil knot
hkknott2=t(G2k1$knot) ;hkknottnon2=G2k1$knotnon
hkknott3=t(G3k1$knot) ;hkknottnon3=G3k1$knotnon
hk1=matrix(G1k2$beta,ncol=1);hknon1=matrix(G1k2$betanon,ncol=1) #hasil beta
hk2=matrix(G2k2$beta,ncol=1);hknon2=matrix(G2k2$betanon,ncol=1)
hk3=matrix(G3k2$beta,ncol=1);hknon3=matrix(G3k2$betanon,ncol=1)
hka1=G1k2$alfa;hkanon1=G1k2$alfa #hasil alfa
hka2=G2k2$alfa;hkanon2=G2k2$alfa
hka3=G3k2$alfa;hkanon3=G3k2$alfa
#save GCV,lambda,Rsq dan MSE
sg1=G1k2$hasil;sgnon1=G1k2$hasilnon
sg2=G2k2$hasil;sgnon2=G2k2$hasilnon
sg3=G3k2$hasil;sgnon3=G3k2$hasilnon

if (v==1) { dasknot=matrix(c(0.2,0.5,0.8),nrow=3,ncol=1)
  sknotasli=matrix(c(0.45,0.33,0.66,0.25,0.525,0.8)) } else if (v==2)
{dasknot=matrix(c(0.1,0.5,0.9),nrow=3,ncol=1)
  sknotasli=matrix(c(0.1,0.1,0.5,0.1,0.5,0.9)) } else {
  dasknot=matrix(c(-0.6,0.1,0.5),nrow=3,ncol=1);sknotasli=matrix(c(-0.6,-
0.6,0.1,-0.6,0.1,0.5) )}

if (u==1) {knotasli=sknotasli[1]} else if (u==2) {knotasli=sknotasli[2:3]} else
{knotasli=sknotasli[4:6]}
spar1=cbind(t(paramet(kf,v,1)),t(sknotasli[1]))
spar2=cbind(t(paramet(kf,v,2)),t(sknotasli[2:3]))
spar3=cbind(t(paramet(kf,v,3)),t(sknotasli[4:6]))

cat("=====", "\n")
cat("Nilai GCV terkecil dengan fourier-Spline ", "\n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV      = ",minGCVk1, "\n")
cat("Knot      = ",knot1, "\n")
cat("Knot_asli = ",knotasli, "\n")
cat("Lambda    = ",lambda, "\n")
cat("k         = ",k, "\n")
cat("v         = ",v, "\n")
cat("u         = ",u, "\n")

cat("\n")
estim=estimasi(data,X,W,lambda,k,v,u,name,"kasli")
C=estim$C ; res=estim$res ; Rsq=estim$Rsq ; yhat=estim$yhat

```

```

#windows()

mypath <- file.path(paste(name,"K = ",kf," grafik_.jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=690)
if (index==0) {par(mfrow=c(2,2))} else {par(mfrow=c(2,3))}
for (i in 1:(ncol(data)-1))
{graf(estim,data,i,as.character(i),index,kf,v,u,name,"kasli")}
dev.off()
if (index==0) {par(mfrow=c(2,2))} else {par(mfrow=c(2,3))}
for (i in 1:(ncol(data)-1))
{graf(estim,data,i,as.character(i),index,kf,v,u,name,"kasli")}
par(mfrow=c(1,1))

B=estim$B
alfa=estim$alfa
beta=estim$beta

databaru=griddata(data,'all',k,v,u,name,kasli)
yhat2=cariyhat(estim,databaru,knot1,k,'all',v,u,name,"kasli)
databaru=griddata(data,'small',k,v,u,name,kasli)
yhat2=cariyhat(estim,databaru,knot1,k,'small',v,u,name,"kasli)

#non
knotaslinon=knotasli
cat("=====", "\n")
cat("Nilai GCV non optimum dengan fourier-Spline ", "\n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV      = ",maxGCVk1, "\n")
cat("Knot      = ",knotnon1, "\n")
cat("Knot_asli = ",knotaslinon, "\n")
cat("Lambda    = ",lambdanon, "\n")
cat("k         = ",k, "\n")
cat("v         = ",v, "\n")
cat("u         = ",unon, "\n")

cat("\n")
estimnon=estimasi(datanon,Xnon,W,lambdanon,k,v,unon,name,'non',kasli)
Cnon=estimnon$C; resnon=estimnon$res; Rsqnon=estimnon$Rsq;
yhatnon=estimnon$yhat
#windows()

mypath <- file.path(paste(name,"K = ",kf," grafik_non_optimum_.jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=690)
if (index==0) {par(mfrow=c(2,2))} else {par(mfrow=c(2,3))}
for (i in 1:(ncol(data)-1))
{graf(estimnon,datanon,i,as.character(i),index,kf,v,unon,name,'non',kasli)}
dev.off()

Bnon=estimnon$B

```

```

alfanon=estimnon$alfa
betanon=estimnon$beta
databarunon=griddata(datanon,'all',k,v,unon,name,kasli)
yhat2non=cariyhat(estim,databaru,knot1,k,'all',v,unon,name,'non',kasli)
databarunon=griddata(datanon,'small',k,v,unon,name,kasli)

yhat2non=cariyhat(estimnon,databarunon,knotnon1,k,'small',v,unon,name,'non',kasli)

list(kmin1=kmin1,kmin2=kmin2,kmin3=kmin3,hk1=hk1,hknon1=hknon1,hk2=hk2,
hknon2=hknon2,hk3=hk3,hknon3=hknon3,

spar1=spar1,spar2=spar2,spar3=spar3,sg1=sg1,sg2=sg2,sg3=sg3,knotmin1=knotmin1,
knotmin2=knotmin2,knotmin3=knotmin3,
    sgnon1=sgnon1,sgnon2=sgnon2,sgnon3=sgnon3,hka1=hka1,hkanon1=hkanon1,

hka2=hka2,hkanon2=hkanon2,hka3=hka3,hkanon3=hkanon3,hkknott1=hkknott1,hk
knot2=hkknott2,hkknott3=hkknott3,

hkknottnon1=hkknottnon1,hkknottnon2=hkknottnon2,hkknottnon3=hkknottnon3)
}

paramet=function(k,v,u)
{
  dask=matrix(c(2,1,20,25,35,-1.2,2.1,3.3,-2.1, 0.2,4,-0.5),ncol=1)
  if (v==1) {dasv=matrix(c(10,0,0),ncol=1)
    dasu=matrix(c(3,7,5),ncol=1)
  } else if (v==2) {dasv=matrix(c(4,6,0),ncol=1)
    dasu=matrix(c(2,-3,5),ncol=1)
  } else {dasv=matrix(c(0.1,0.3,0.5),ncol=1)
    dasu=matrix(c(5,-7,4),ncol=1)
  }
  dask2=matrix(c(dask[1:(2+k)]),ncol=1)
  dasv2=matrix(c(dasv[1:v]),ncol=1)
  dasu2=matrix(c(dasu[1:u]),ncol=1)
  parameter=rbind(dask2,dasv2,dasu2)
  return(parameter)
}

estimasi=function(data,X,W,lambda,k,v,u,name,gcv,kasli)
{
  parameter=paramet(k,v,u)
  colnames(parameter)<-"parameter"
  data=as.matrix(data)
  y=as.matrix(data[,1])
  n=nrow(y)
  X=as.matrix(X)
  W=as.matrix(W)

```

```

der=funksik(k,data[,2])
D=der$D
I1=diag(ncol(X))
I2=diag(nrow(X))
lambda0=10^-25
lambda1=1-10^-10
lambdagab=as.matrix(cbind(lambda0,lambda1,lambda))
estim_alfa=matrix(ncol=3,nrow=ncol(W))
estim_beta=matrix(ncol=3,nrow=ncol(X))
for (i in 1:3)
{
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambdagab[i]*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1)%*%B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
  estim_alfa[,i]=A1)%*%y
  estim_beta[,i]=B3)%*%y
}
C=W)%*%A1+X)%*%B3
yhat=C)%*%y
SSE=sum((y-yhat)^2)
SSR=sum((yhat-mean(y))^2)
SST=SSR+SSE
Rsqr=(SSR/(SST))*100
MSE=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n

GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
GCV=MSE/GCVbwh
res=y-yhat
cat("\n")
cat("\n")
B=matrix(rbind(matrix(estim_alfa[,3],ncol=1),matrix(estim_beta[,3],ncol=1)))
B0=matrix(rbind(matrix(estim_alfa[,1],ncol=1),matrix(estim_beta[,1],ncol=1)))
B1=matrix(rbind(matrix(estim_alfa[,2],ncol=1),matrix(estim_beta[,2],ncol=1)))
n1=length(B)
colnames(B)<-"  estimasi_parameter"
MSR=SSR/(n1-1)
cat("=====", "\n")
cat("Estimasi Parameter", "\n")
cat("=====", "\n")
Bplus=matrix(ncol=2,nrow=max(length(B),length(parameter)))
Bplus[1:(length(parameter)),1] =parameter
Bplus[1:(length(B)),2] =B
print(Bplus)
cat("\n")
predic=cbind(W,X)
if (gcv=='non'){

```



```

write.csv(B,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k,"
estimasi_parameter non optimum v=",v,".csv"))
write.csv(predic,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k,"
estimasi_matriks_W_dan_X non optimum v=",v,".csv"))
write.csv(yhat,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," estimasi_yhat
non optimum v=",v,".csv"))
write.csv(res,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," estimasi_residual
non optimum v=",v,".csv"))
write.csv(C,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," estimasi_C non
optimum v=",v,".csv"))
}else{
write.csv(B,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k,"
estimasi_parameter v=",v,".csv"))
write.csv(predic,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k,"
estimasi_matriks_W_dan_X v=",v,".csv"))
write.csv(yhat,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," estimasi_yhat
v=",v,".csv"))
write.csv(res,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," estimasi_residual
v=",v,".csv"))
write.csv(C,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," estimasi_C
v=",v,".csv"))
}
}

list(matx=predic,res=res,yhat=yhat,C=C,Rsq=Rsq,B=B,X=X,W=W,B0=B0,B1=B1,MSE
=MSE,alfa=estim_alfa[,3],beta=estim_beta[,3])
}

```

```

graf=function(G,data,m,a,index,k,v,u,name,gcv,kasli)
{
# G adalah hasil fungsi dari GCV
# data adalah data yang digunakan
# m adalah variabel yang akan di grafikkan (isikan angka 1,2,3, sampai jumlah
variabel)
# a adalah nama dari grafik yang akan dibuat misalkan "plot variabel temperature"
(harus didalam tanda petik)
# index => isikan angka 0 jika data yang digunakan merupakan data simulasi
#      dan isikan angka 1 jika yang digunakan merupakan data riil
# k adalah k yang dipakai untuk lambda
if (index==0)
{f1=as.matrix(read.csv(paste(name,"K_asli = ",kasli," data_fungsi_random_fourier-
Spline_v=",v,"_u=",u,".csv"),header=TRUE))
m1=ncol(f1)
x=data[,m+1]
f=as.matrix(f1[,m+1]) # fungsi asli
ge=as.matrix(f1[,m+1]+f1[,m1])
X=as.matrix(G$X);W=as.matrix(G$W)
MX=cbind(W,X)
B=G$B;B0=G$B0;B1=G$B1

```

```

nb=length(B)
if (m==2)
{ B[c(1,2,3:2+k)]=0;B0[c(1,2,3:2+k)]=0;B1[c(1,2,3:2+k)]=0} else
{ B[c((3+k):nb)]=0;B0[c((3+k):nb)]=0;B1[c((3+k):nb)]=0}
MX=cbind(W,X)
ghat=MX%%B      # ghat
ghat_lim0=MX%%B0
ghat_lim1=MX%%B1
dat=cbind(x,ge,ghat,f,ghat_lim0,ghat_lim1)
dat=dat[order(x),]
x=dat[,1]  #x
ge=dat[,2]  # titik (sudah ditambah error)
ghat=dat[,3] # estimasi fungsi dengan lambda optimum
f=dat[,4]   # fungsi sebenarnya
ghat_lim0=dat[,5] # estimasi fungsi dengan lambda mendekati 0
ghat_lim1=dat[,6] # estimasi fungsi dengan lambda mendekati 1
if (gcv=='non') a=paste('non optimum',a) else a=a
plot(x,ge,ylim=range(c(ge,f,ghat)),col="black",ylab="",xlab="")
par(new=TRUE)
plot(x,f,main=(a),ylim=range(c(ge,f,ghat)),type="l",col="green",ylab="y",xlab="x")
par(new=TRUE)
plot(x,ghat,ylim=range(c(ge,f,ghat)),col="blue",type='l',ylab="",xlab="")

plot(x,ge,ylim=range(c(ge,f,ghat,ghat_lim0,ghat_lim1)),col="black",ylab="",xlab="")
par(new=TRUE)
plot(x,f,main=paste("gab",
a),ylim=range(c(ge,f,ghat,ghat_lim0,ghat_lim1)),type="l",col="green",ylab="y",xlab="
x")
par(new=TRUE)

plot(x,ghat_lim0,ylim=range(c(ge,f,ghat,ghat_lim0,ghat_lim1)),col="blue",type='l',yla
b="",xlab="")
par(new=TRUE)

plot(x,ghat,ylim=range(c(ge,f,ghat,ghat_lim0,ghat_lim1)),col="yellow",type='l',ylab="
",xlab="")
par(new=TRUE)

plot(x,ghat_lim1,ylim=range(c(ge,f,ghat,ghat_lim0,ghat_lim1)),col="red",type='l',ylab
="",xlab="")
write.csv(dat,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",k," data grafik
",a,"v=",v,".csv"))

} else {
y=as.matrix(data[,1])
yhat=G$yhat
x=data[,m+1]
dat=cbind(x,y,yhat)
dat=dat[order(x),]

```

```

x=dat[,1]
y=dat[,2]
yhat=dat[,3]
plot(x,yhat,ylim=range(c(y,yhat)),col="blue",type='b',ylab="",xlab="")
par(new=TRUE)
plot(x,y,main=(a),ylim=range(c(y,yhat)),col="black",ylab="y",xlab="x",type='b')
}
}

```

```

cariX=function(data,knot,v)
{ #mencari nilai X dengan yang diketahui data dengan knotnya
  data=as.matrix(data)
  x=as.matrix(data[,1])
  dataA=as.matrix(data[,2])
  if (v==1) (dataAA=dataA) else if (v==2) dataAA=cbind(dataA,dataA^2) else
  dataAA=cbind(dataA,dataA^2,dataA^3)
  n=nrow(data)
  knot=matrix(knot,nrow=1)
  m1=length(knot)
  data1=matrix(ncol=m1,nrow=n)#in akan menjadi X
  for (j in 1:m1)
  {
    if (m1==1) b=j else if (m1==2)
    {if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2} else
    {b=ceiling(j/3)}
    for (k in 1:n)
    {
      if (x[k,(b)]<knot[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=x[k,(b)]-knot[j]
    }
  }
  satu=rep(1,n)
  X=cbind(dataAA,data1^v)
  return(X)
}

```

```

cariyhat=function(G,data,knot,kf,type,v,u,name,gcv,kasli)
{ #mencari estimasi yhat untuk yhat optimum, limit 0 dan limit 1
  data=as.matrix(data)
  n=sqrt(nrow(data))
  DW=funksik(kf,data[,1])
  X=cariX(data,knot,v)
  W=DW$W
  MX=cbind(W,X)
  B=G$B;B0=G$B0;B1=G$B1
  yhat=MX%*%B # yhat optimum
  yhat_lim0=MX%*%B0
  yhat_lim1=MX%*%B1
  gridyhat=matrix(yhat,nrow=n)
}

```

```

gridyhat_lim0=matrix(yhat_lim0,nrow=n)
gridyhat_lim1=matrix(yhat_lim1,nrow=n)
if (gcv=='non')
{
  write.csv(gridyhat,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",kf,"
data_grid_non_optimum_yhat ",type,"_v=",v,"_u=",u,".csv"))
  write.csv(gridyhat_lim0,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",kf,"
data_grid_non_optimum_yhat_lim0 ", type , "_v=",v,"_u=",u,".csv"))
  write.csv(gridyhat_lim1,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",kf,"
data_grid_non_optimum_yhat_lim1 ", type , "_v=",v,"_u=",u,".csv"))
} else {
  write.csv(gridyhat,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",kf,"
data_grid_yhat ", type , "_v=",v,"_u=",u,".csv"))
  write.csv(gridyhat_lim0,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",kf,"
data_grid_yhat_lim0 ", type , "_v=",v,"_u=",u,".csv"))
  write.csv(gridyhat_lim1,file=paste(name,"K_asli = ",kasli,"K_estimate = ",kf,"
data_grid_yhat_lim1 ", type , "_v=",v,"_u=",u,".csv"))
}
list(gridyhat=gridyhat,gridyhat_lim1=gridyhat_lim1,gridyhat_lim0=gridyhat_lim0)
}

griddata=function(data,type,k,v,u,name,kasli)
{ #mencari data grid untuk plot 3d
library(plot3D)
if (type=='all') {
  data=as.matrix(data)
  x1=sort(data[,2])
  x2=sort(data[,3])
  grid=mesh(x1,x2)
  x1_1=matrix(grid$x,ncol=1)
  x2_1=matrix(grid$y,ncol=1) }else{
  x11=read.csv(paste(name,"K_asli = ",kasli,"
data_grid_x1_small_v=",v,"_u=",u,".csv"));x11=as.matrix(x11[,
1]);x1_1=matrix(x11,ncol=1)
  x22=read.csv(paste(name,"K_asli = ",kasli,"
data_grid_x2_small_v=",v,"_u=",u,".csv"));x22=as.matrix(x22[,
1]);x2_1=matrix(x22,ncol=1)
  }
  databaru=cbind(x1_1,x2_1)
}

core=function(G1k1,data1,kf,u,v,name,index,kasli)
{
  k=kf;
  W=G1k1$W ; X=G1k1$X;lambda=G1k1$lambda
;knot1=G1k1$knot;data=data1;u=u
  maxGCVk1=G1k1$maxgcv

```

```

Xnon=G1k1$Xnon;lambdanon=G1k1$lambdanon
;knotnon1=G1k1$knotnon;datanon=data1;unon=u
if (v==1) { dasknot=matrix(c(0.2,0.5,0.8),nrow=3,ncol=1)
          sknotasli=matrix(c(0.45,0.33,0.66,0.25,0.525,0.8)) } else if (v==2)
{dasknot=matrix(c(0.1,0.5,0.9),nrow=3,ncol=1)
  sknotasli=matrix(c(0.1,0.1,0.5,0.1,0.5,0.9)) } else {
  dasknot=matrix(c(-0.6,0.1,0.5),nrow=3,ncol=1);sknotasli=matrix(c(-0.6,-
0.6,0.1,-0.6,0.1,0.5) )}
if (u==1) {knotasli=sknotasli[1]} else if (u==2) {knotasli=sknotasli[2:3]} else
{knotasli=sknotasli[4:6]}
cat("\n")
cat("HASIL estimasi paramater, ",u," knot k=",kf,"\n")
estim=estimasi(data,X,W,lambda,k,v,u,name,"kasli")
C=estim$C; res=estim$res; Rsq=estim$Rsq; yhat=estim$yhat;MSE=estim$MSE
#windows()

mypath <- file.path(paste(name,"K_asli = ",kasli," K_estimate = ",kf,"
grafik_u=",u,".jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=690)
if (index==0) {par(mfrow=c(2,2))} else {par(mfrow=c(2,3))}
for (i in 1:(ncol(data)-1))
{graf(estim,data,i,as.character(i),index,kf,v,u,name,"kasli")}
dev.off()
par(mfrow=c(1,1))

B=estim$B
alfa=estim$alfa
beta=estim$beta
databaru=griddata(data,'all',k,v,u,name,kasli)
yhat2=cariyhat(estim,databaru,knot1,kf,'all',v,u,name,"kasli")
databaru=griddata(data,'small',k,v,u,name,kasli)
yhat2=cariyhat(estim,databaru,knot1,kf,'small',v,u,name,"kasli")

#non
knotaslinon=dasknot[1:unon]
cat("\n")
cat("HASIL estimasi paramater non optimum, ",u," knot k=",kf,"\n")
estimnon=estimasi(datanon,Xnon,W,lambdanon,k,v,unon,name,'non',kasli)
Cnon=estimnon$C; resnon=estimnon$res; Rsqnon=estimnon$Rsq;
yhatnon=estimnon$yhat;;MSEnon=estimnon$MSE
#windows()

mypath <- file.path(paste(name,"K_asli = ",kasli," K_estimate = ",kf,"
grafik_non_optimum_.jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=690)
if (index==0) {par(mfrow=c(2,2))} else {par(mfrow=c(2,3))}
for (i in 1:(ncol(data)-1))
{graf(estimnon,datanon,i,as.character(i),index,kf,v,unon,name,'non',kasli)}
dev.off()

```

```

Bnon=estimnon$B
alfanon=estimnon$alfa
betanon=estimnon$beta

databarunon=griddata(datanon,'all',k,v,unon,name,kasli)

yhat2non=cariyhat(estimnon,databarunon,knotnon1,kf,'all',v,unon,name,'non',kasli)
databarunon=griddata(datanon,'small',k,v,unon,name,kasli)

yhat2non=cariyhat(estimnon,databarunon,knotnon1,kf,'small',v,unon,name,'non',kasli)
hasil=cbind(G1k1$mingcv,lambda=G1k1$lambda,estim$Rsqr,estim$MSE)

hasilnon=cbind(G1k1$maxgcv,lambda=G1k1$lambda,estimnon$Rsqr,estimnon$MSE)

list(B=B,Bnon=Bnon,hasil=hasil,hasilnon=hasilnon,alfa=alfa,beta=beta,alfanon=alfanon,betanon=betanon)
}

```

Lampiran 5.6 Tabel Nilai GCV Parameter Penghalus $\lambda_{optimal}$, R^2 , dan MSE

Tabel 5.7 Fungsi M_{12}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot: r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	1	2	0,121	0,0008	98,75	0,113
2	1	2	0,110	0,0007	98,82	0,104
3	1	2	0,114	0,0007	98,77	0,107
4	1	2	0,111	0,0008	98,80	0,105
5	1	2	0,100	0,0007	99,00	0,094
6	1	2	0,096	0,0006	98,98	0,090
7	1	2	0,081	0,0005	99,17	0,076 *
8	1	2	0,103	0,0005	98,94	0,097
9	1	2	0,115	0,0006	98,78	0,109
10	1	2	0,104	0,0005	98,96	0,098

Tabel 5.8 Fungsi M_{13}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot:r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	1	3	0,105	0,0007	98,85	0,098
2	1	3	0,095	0,0005	98,99	0,088
3	1	3	0,109	0,0007	98,88	0,101
4	1	3	0,099	0,0005	98,98	0,092
5	1	3	0,124	0,0007	98,72	0,116
6	1	3	0,086	0,0005	99,12	0,080 *
7	1	3	0,100	0,0006	98,97	0,093
8	1	3	0,112	0,0007	98,88	0,104
9	1	3	0,113	0,0006	98,81	0,105
10	1	3	0,101	0,0005	99,00	0,094

Lanjutan. Lampiran 5.6 Tabel Nilai GCV Parameter Penghalus $\lambda_{optimal}$, R^2 , dan MSE

Tabel 5.9 Fungsi M_{21}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot:r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	2	1	0,115	0,006	98,80	0,109
2	2	1	0,111	0,008	98,81	0,104
3	2	1	0,112	0,006	98,78	0,105
4	2	1	0,112	0,006	98,78	0,106
5	2	1	0,095	0,006	99,04	0,090
6	2	1	0,088	0,005	99,06	0,083
7	2	1	0,076	0,005	99,21	0,072 *
8	2	1	0,100	0,007	98,97	0,094
9	2	1	0,103	0,003	98,90	0,097
10	2	1	0,098	0,005	99,01	0,092

Tabel 5.10 Fungsi M_{22}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot:r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	2	2	0,120	0,003	98,69	0,111
2	2	2	0,104	0,005	98,88	0,097
3	2	2	0,130	0,009	98,66	0,121
4	2	2	0,115	0,007	98,82	0,107
5	2	2	0,141	0,009	98,54	0,131
6	2	2	0,111	0,008	98,86	0,103
7	2	2	0,109	0,008	98,87	0,102
8	2	2	0,130	0,007	98,69	0,121
9	2	2	0,084	0,003	99,10	0,079 *
10	2	2	0,104	0,005	98,96	0,097

Lanjutan. Lampiran 5.6 Tabel Nilai GCV Parameter Penghalus $\lambda_{optimal}$, R^2 , dan MSE

Tabel 5.11 Fungsi M_{23}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot: r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	2	3	0,112	0,0005	98,86	0,103
2	2	3	0,112	0,0080	98,83	0,103
3	2	3	0,112	0,0060	98,81	0,104
4	2	3	0,107	0,0065	98,85	0,099
5	2	3	0,098	0,0065	99,03	0,090
6	2	3	0,092	0,0040	99,04	0,084
7	2	3	0,081	0,0050	99,18	0,075 *
8	2	3	0,100	0,0060	99,00	0,092
9	2	3	0,103	0,0035	98,92	0,095
10	2	3	0,101	0,0050	99,01	0,093

Tabel 5.12 Fungsi M_{31}

Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot: r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	3	1	0,163	0,0150	98,28	0,153
2	3	1	0,108	0,0025	98,84	0,101
3	3	1	0,109	0,0015	98,82	0,102
4	3	1	0,124	0,0055	98,72	0,116
5	3	1	0,143	0,0100	98,50	0,135
6	3	1	0,120	0,0100	98,76	0,113
7	3	1	0,109	0,0150	98,86	0,103
8	3	1	0,138	0,0085	98,60	0,130
9	3	1	0,131	0,0095	98,61	0,123
10	3	1	0,096	0,0015	99,05	0,089 *

Lanjutan. Lampiran 5.6 Tabel Nilai GCV Parameter Penghalus $\lambda_{optimal}$, R^2 , dan MSE

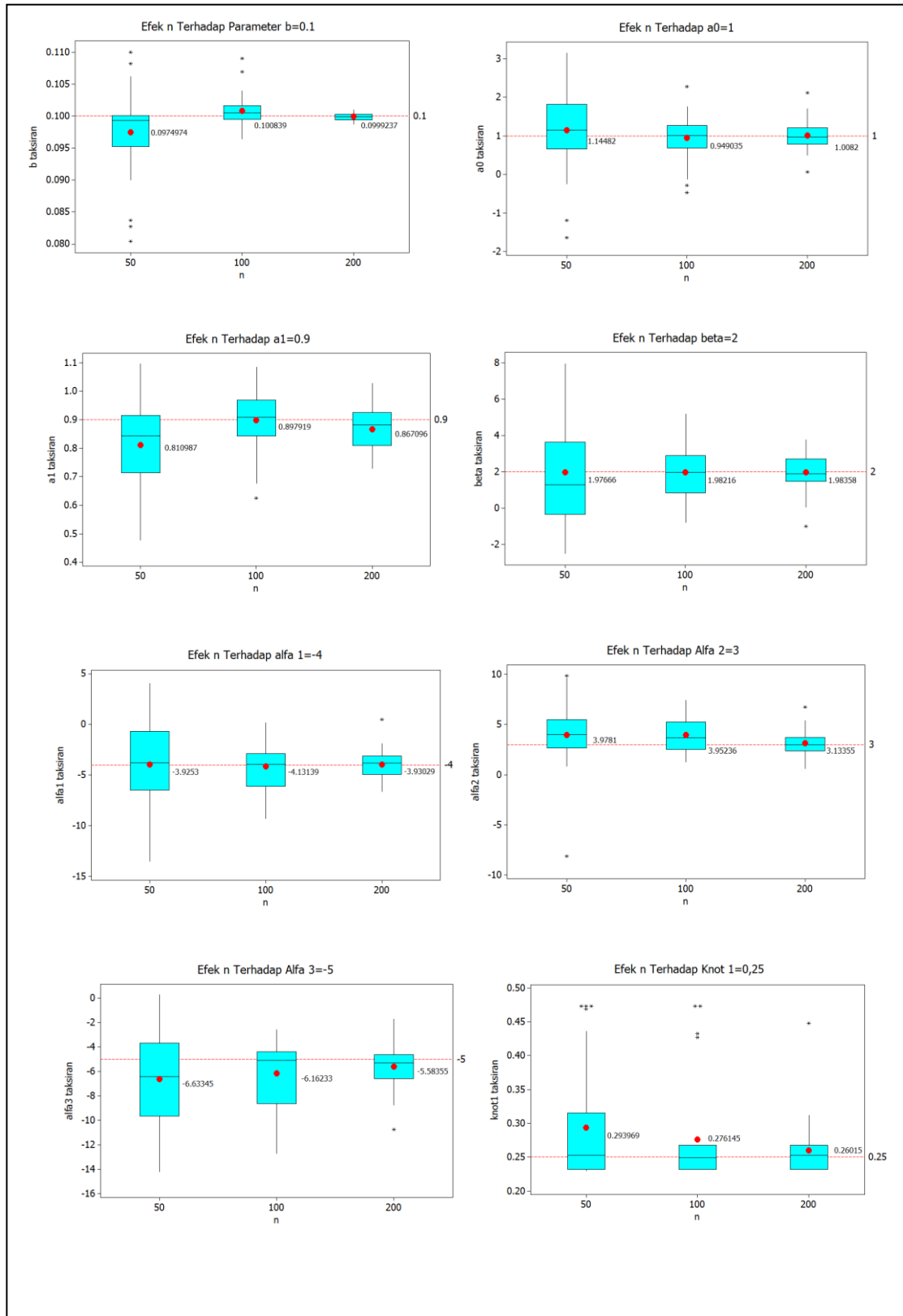
Tabel 5.13 Fungsi M_{32}

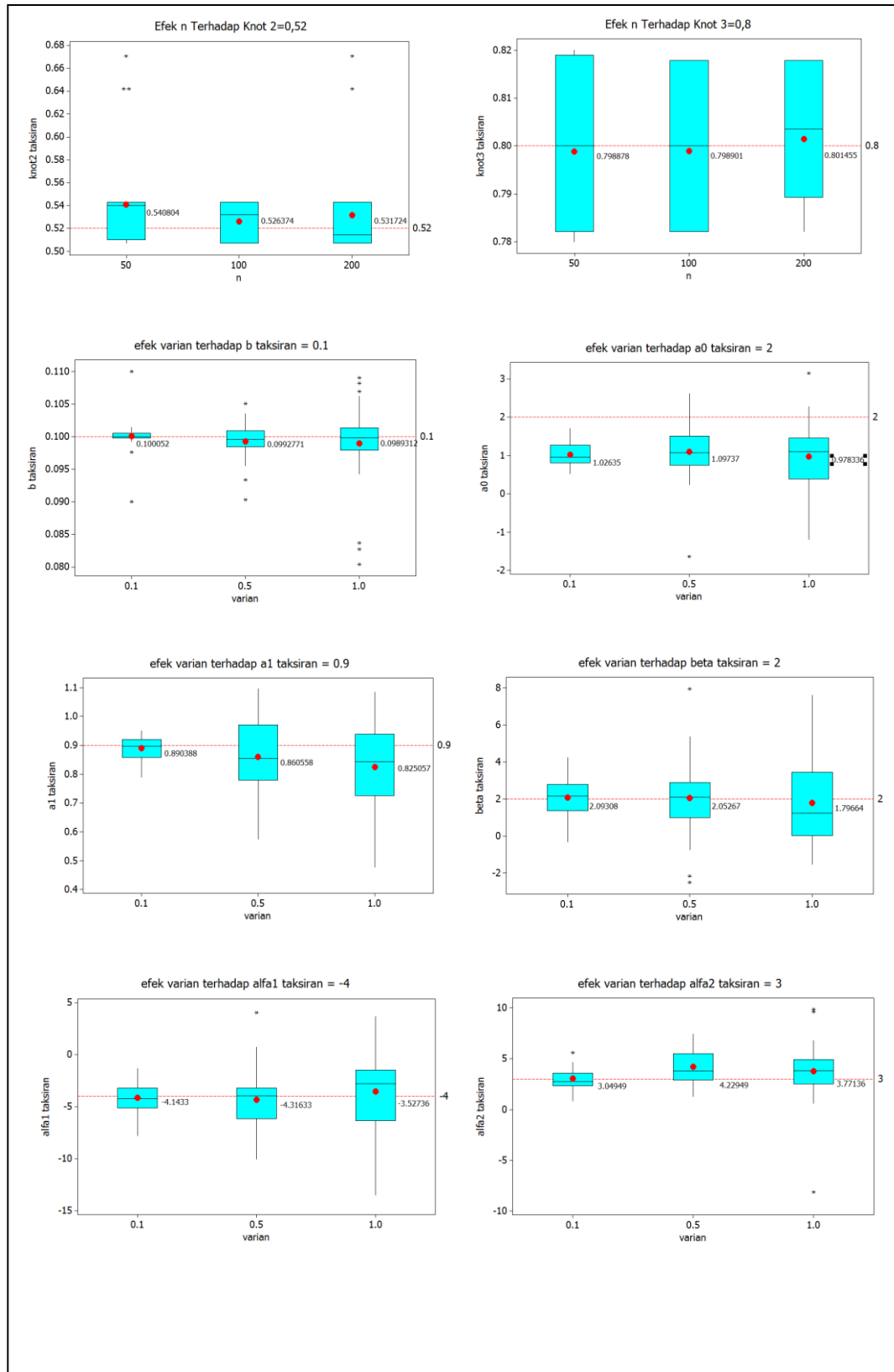
Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot: r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	3	2	0,113	0,0007	98,84	0,105
2	3	2	0,116	0,0080	98,78	0,107
3	3	2	0,114	0,0030	98,79	0,105
4	3	2	0,112	0,0100	98,80	0,104
5	3	2	0,100	0,0100	99,00	0,093
6	3	2	0,095	0,0085	98,99	0,088
7	3	2	0,081	0,0075	99,17	0,075 *
8	3	2	0,104	0,0090	98,94	0,097
9	3	2	0,112	0,0060	98,82	0,103
10	3	2	0,101	0,0010	99,01	0,093

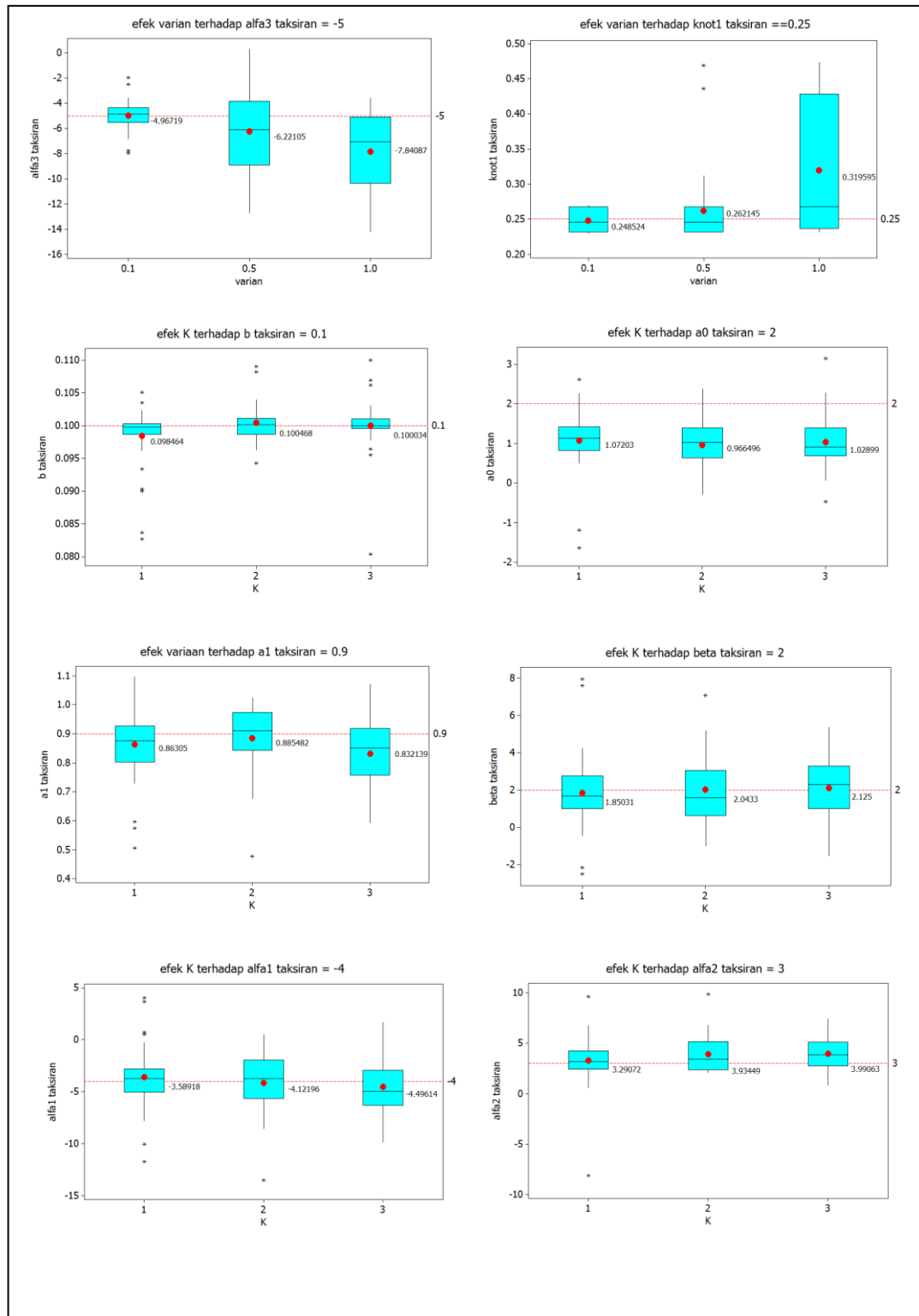
Tabel 5.14 Fungsi M_{33}

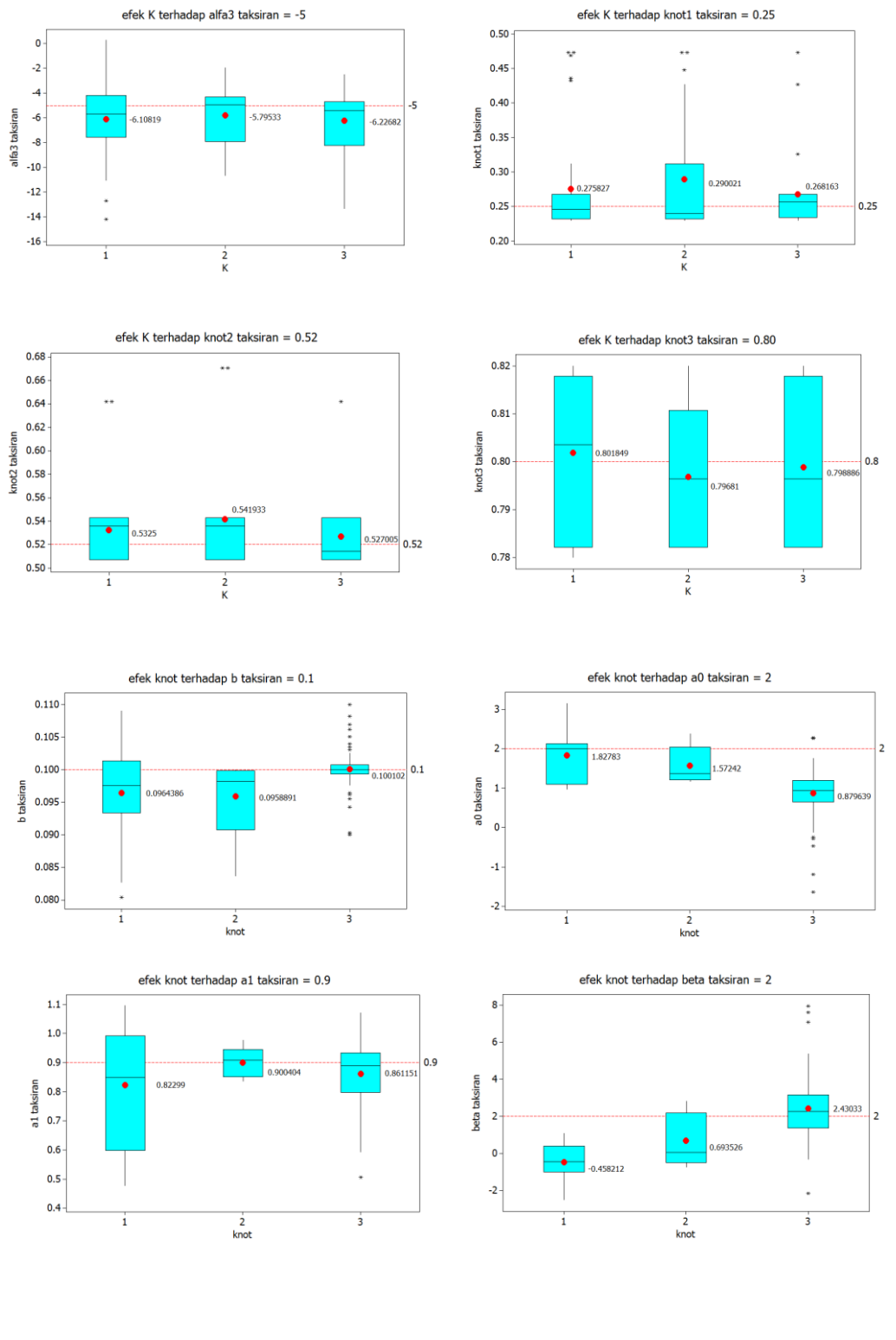
Ulangan	Osilasi K	Banyaknya Knot: r	GCV	$\lambda_{optimal}$	R^2	MSE
1	3	3	0,103	0,0004	98,90	0,094
2	3	3	0,094	0,0080	99,01	0,086
3	3	3	0,110	0,0100	98,88	0,101
4	3	3	0,100	0,0100	98,96	0,092
5	3	3	0,125	0,0100	98,72	0,115
6	3	3	0,085	0,0015	99,15	0,077 *
7	3	3	0,101	0,0100	98,97	0,093
8	3	3	0,112	0,0060	98,89	0,103
9	3	3	0,112	0,0085	98,84	0,103
10	3	3	0,098	0,0010	99,05	0,089

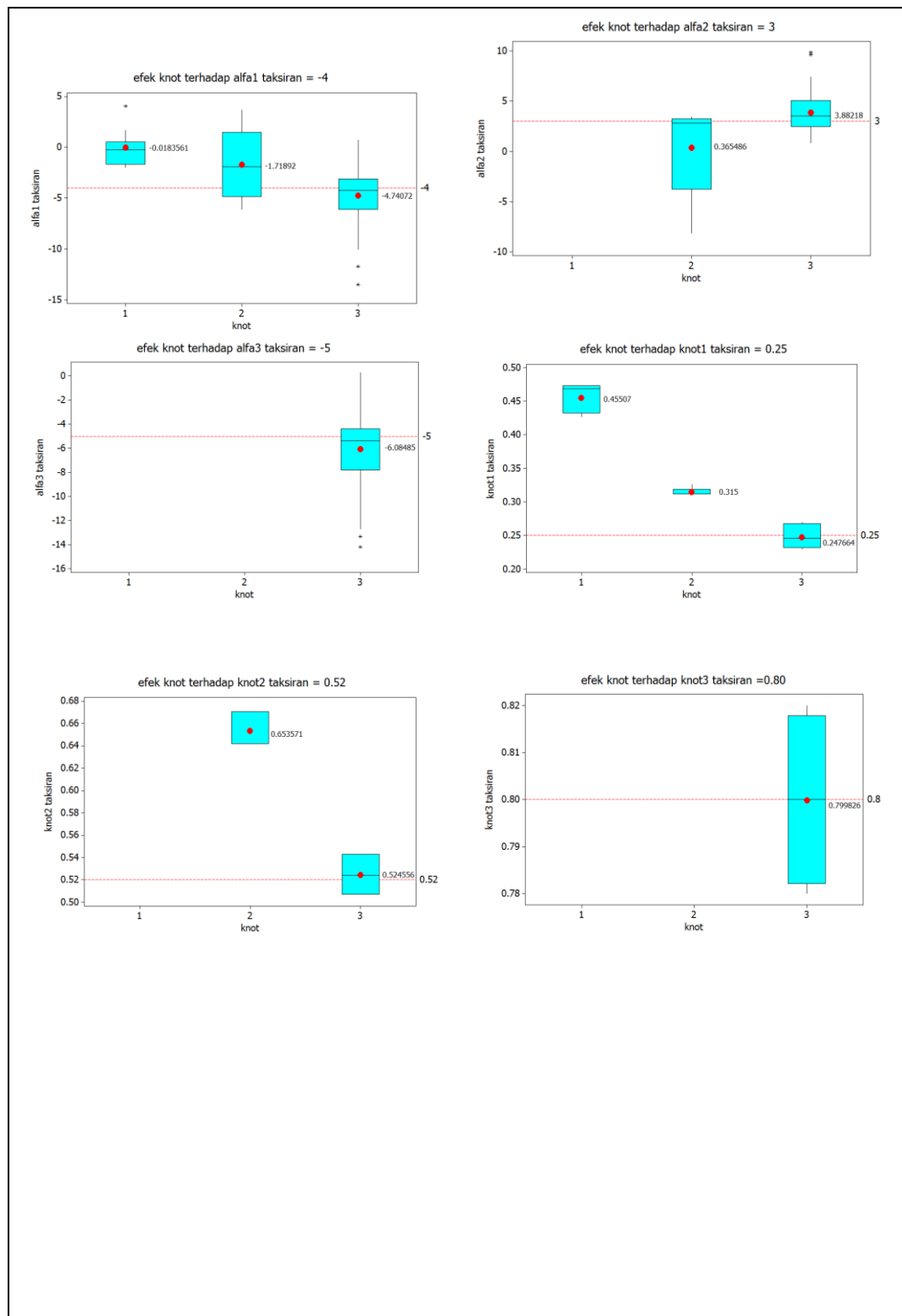
Lampiran 7 Model M_{13}



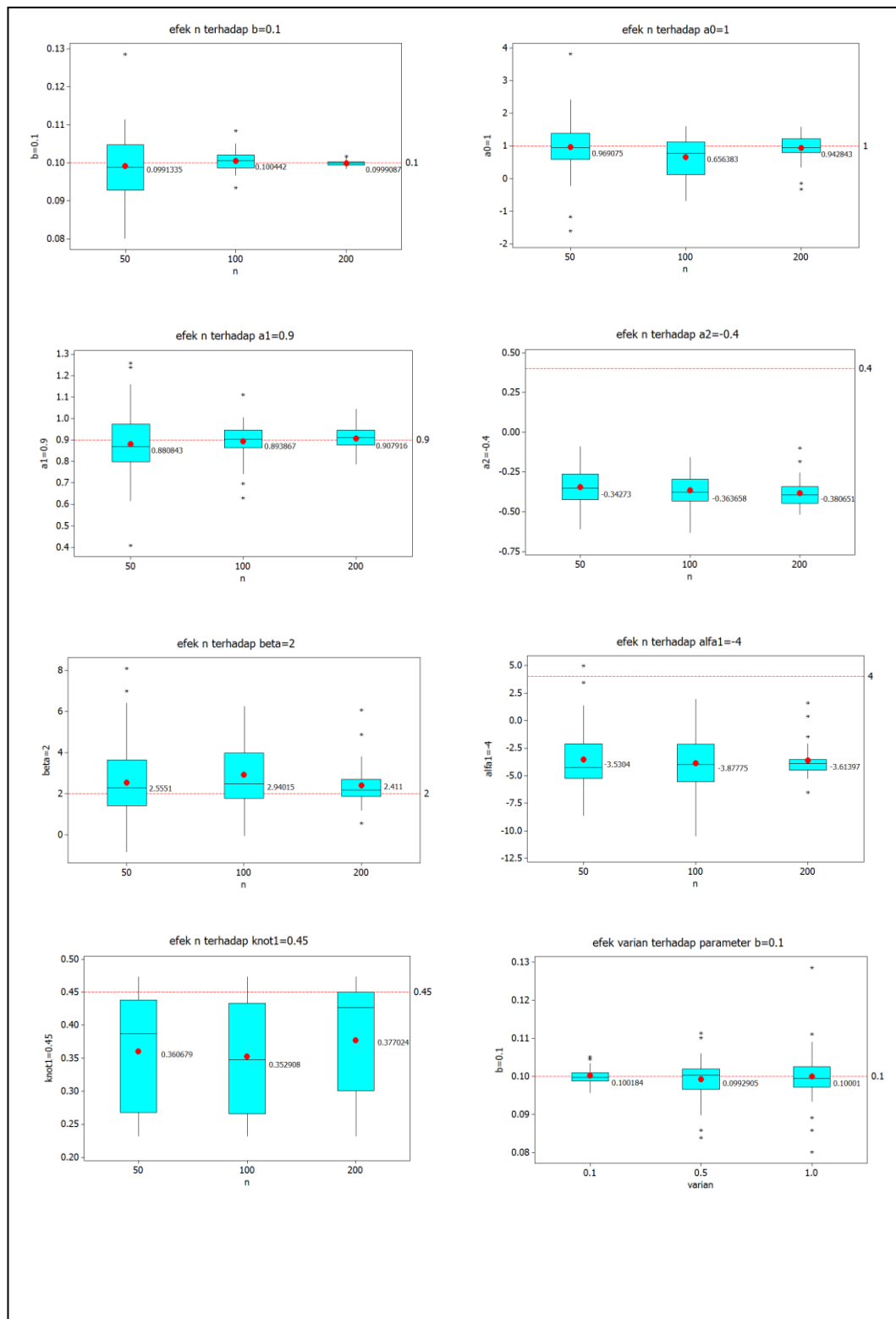


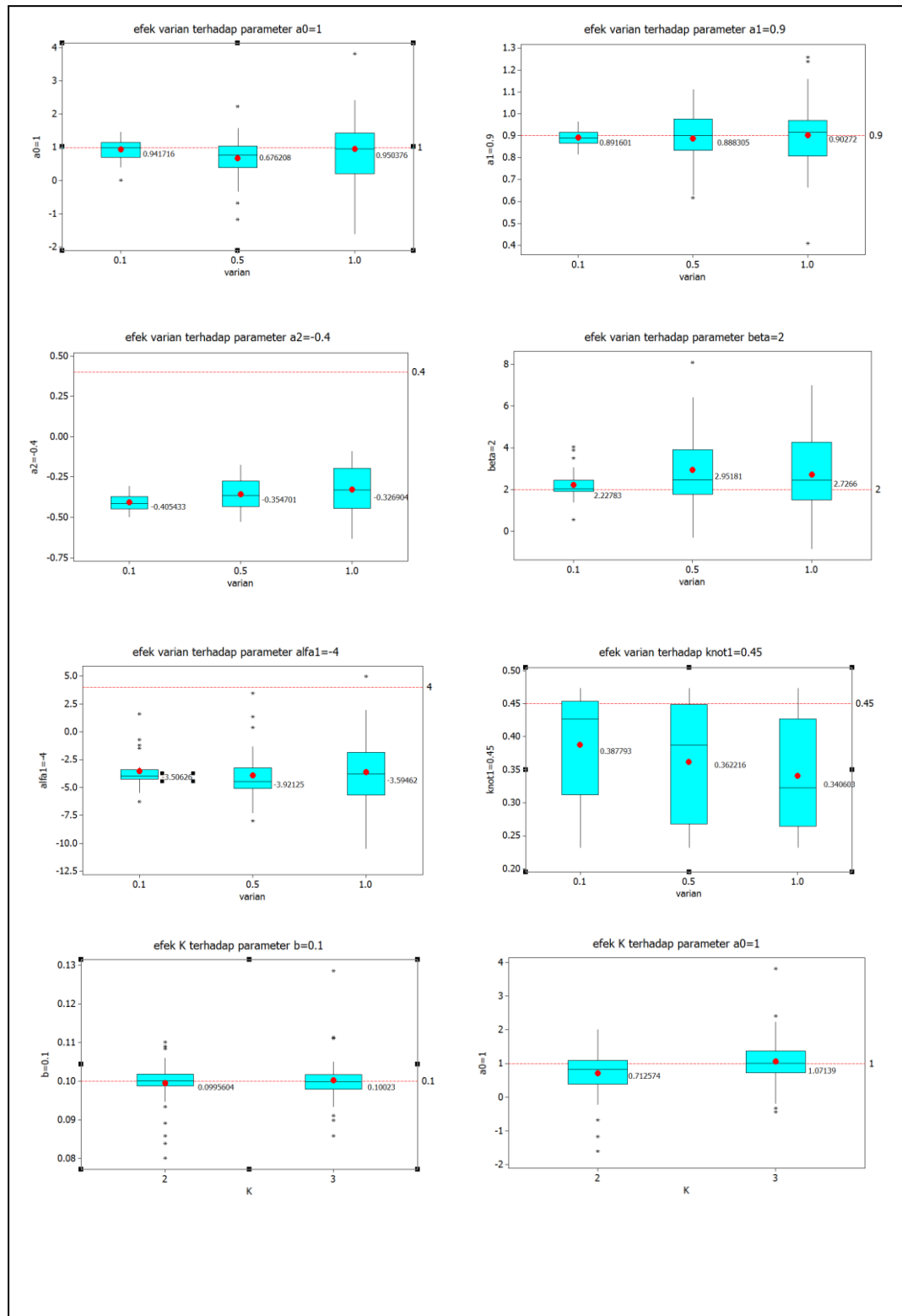


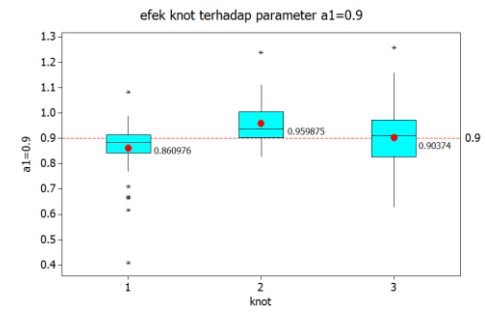
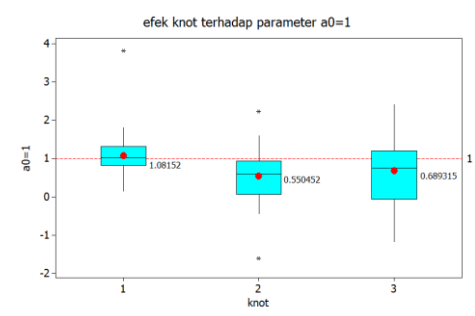
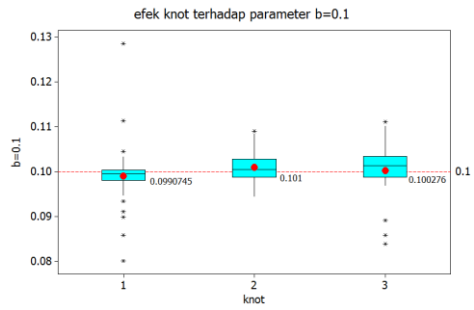
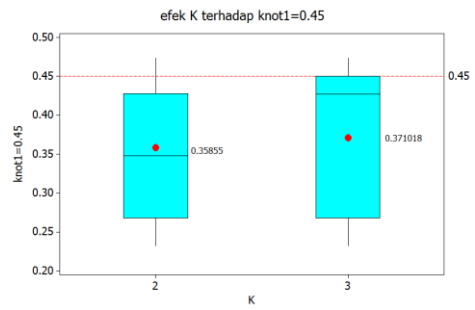
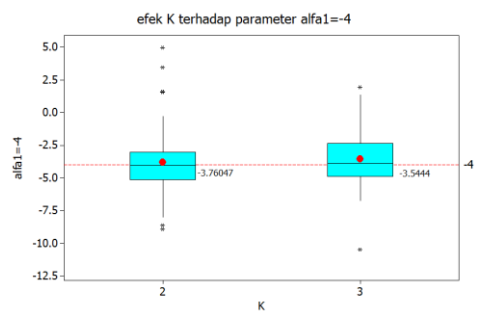
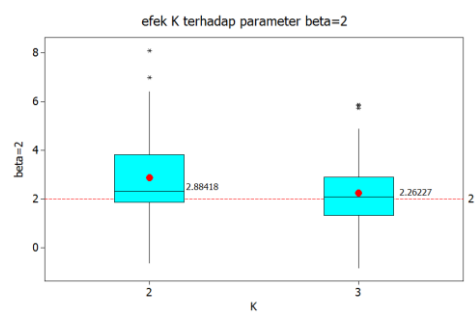
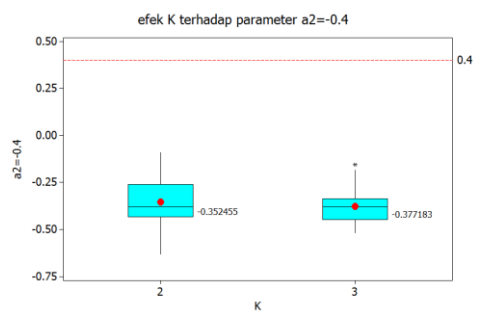
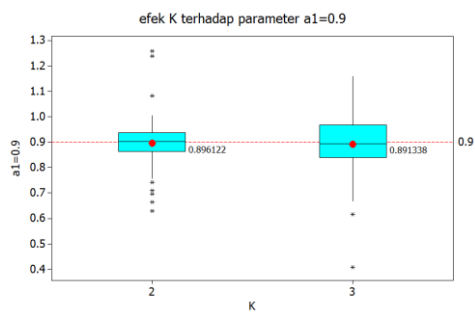


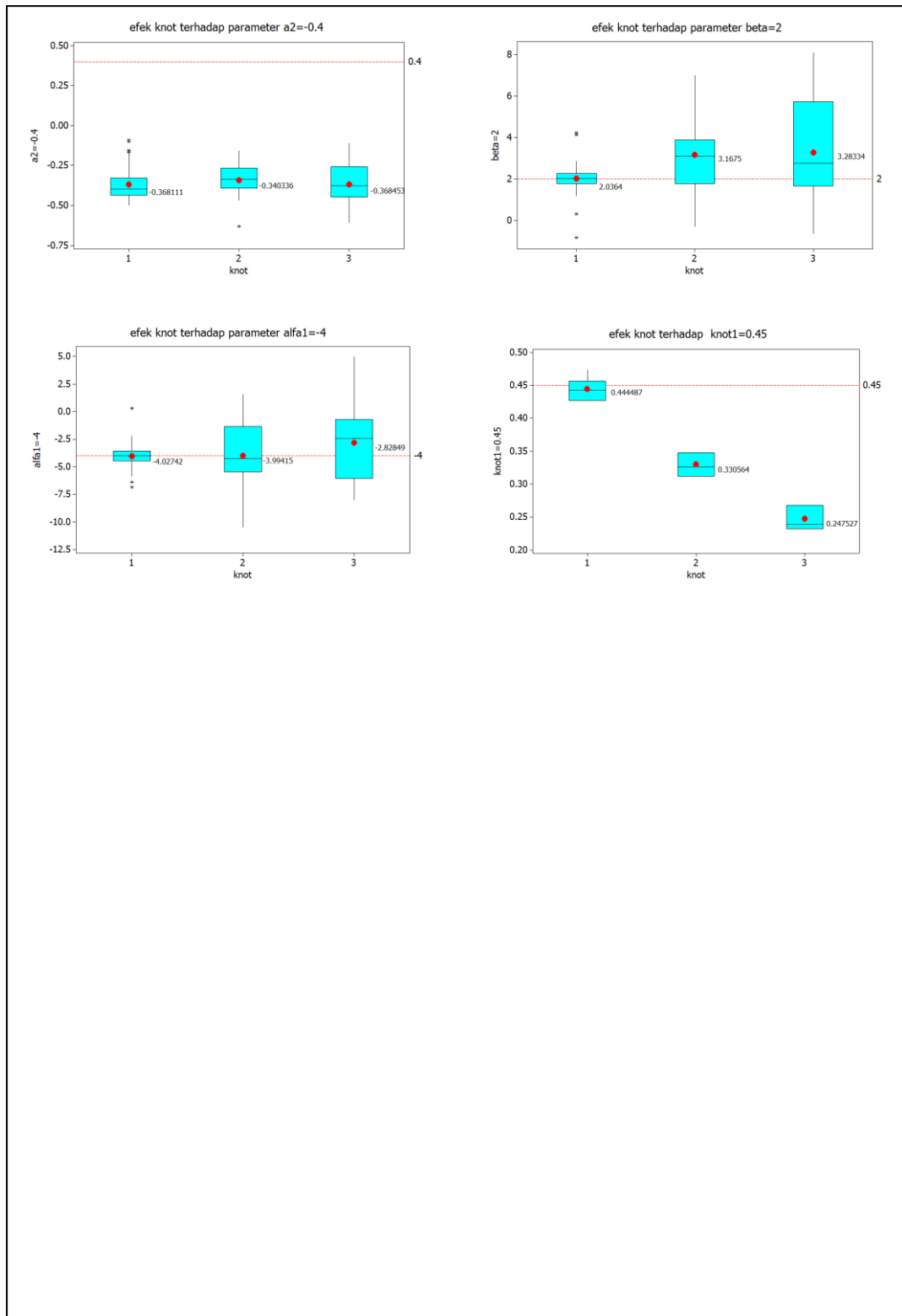


Lampiran 9. Model M_{21}

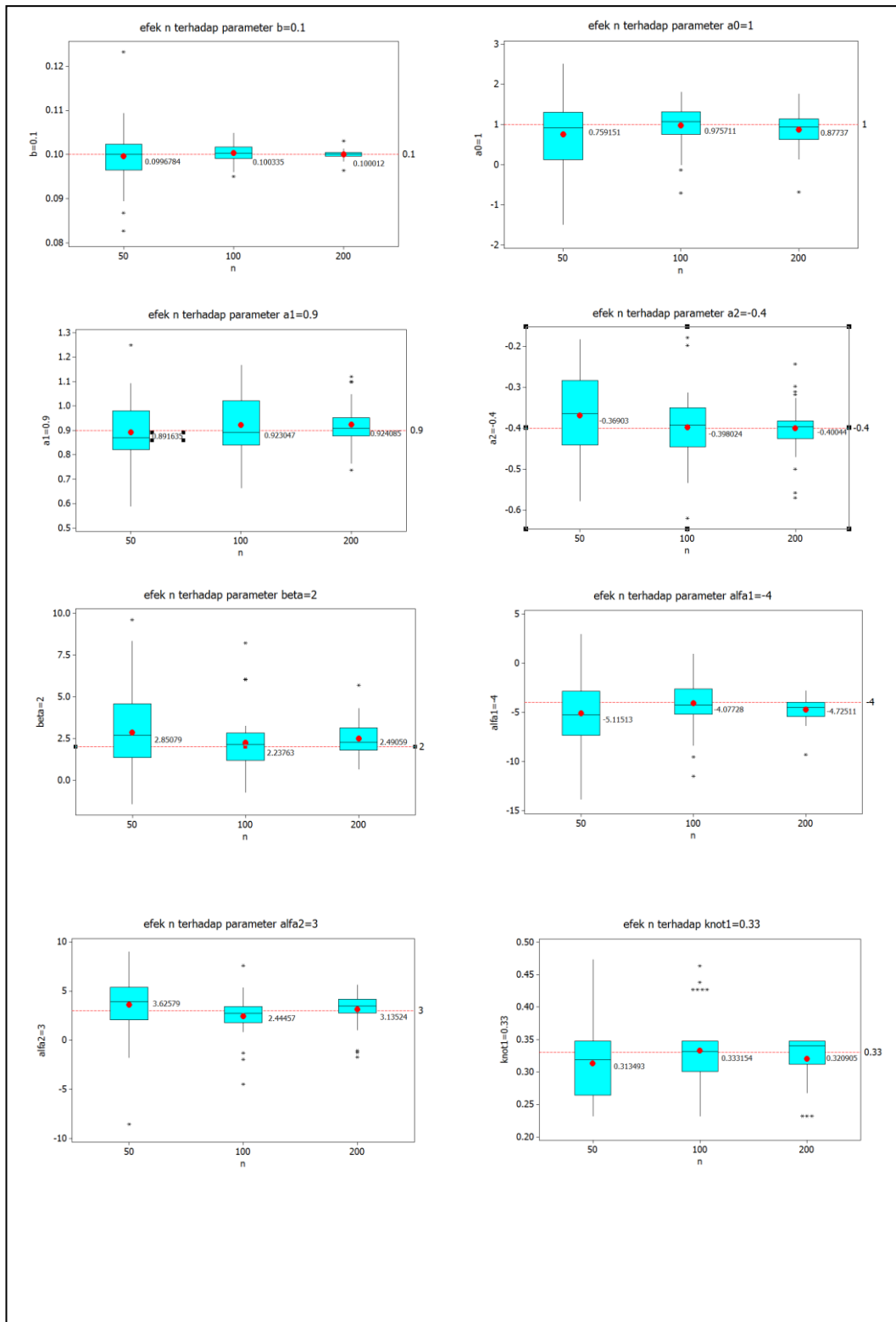


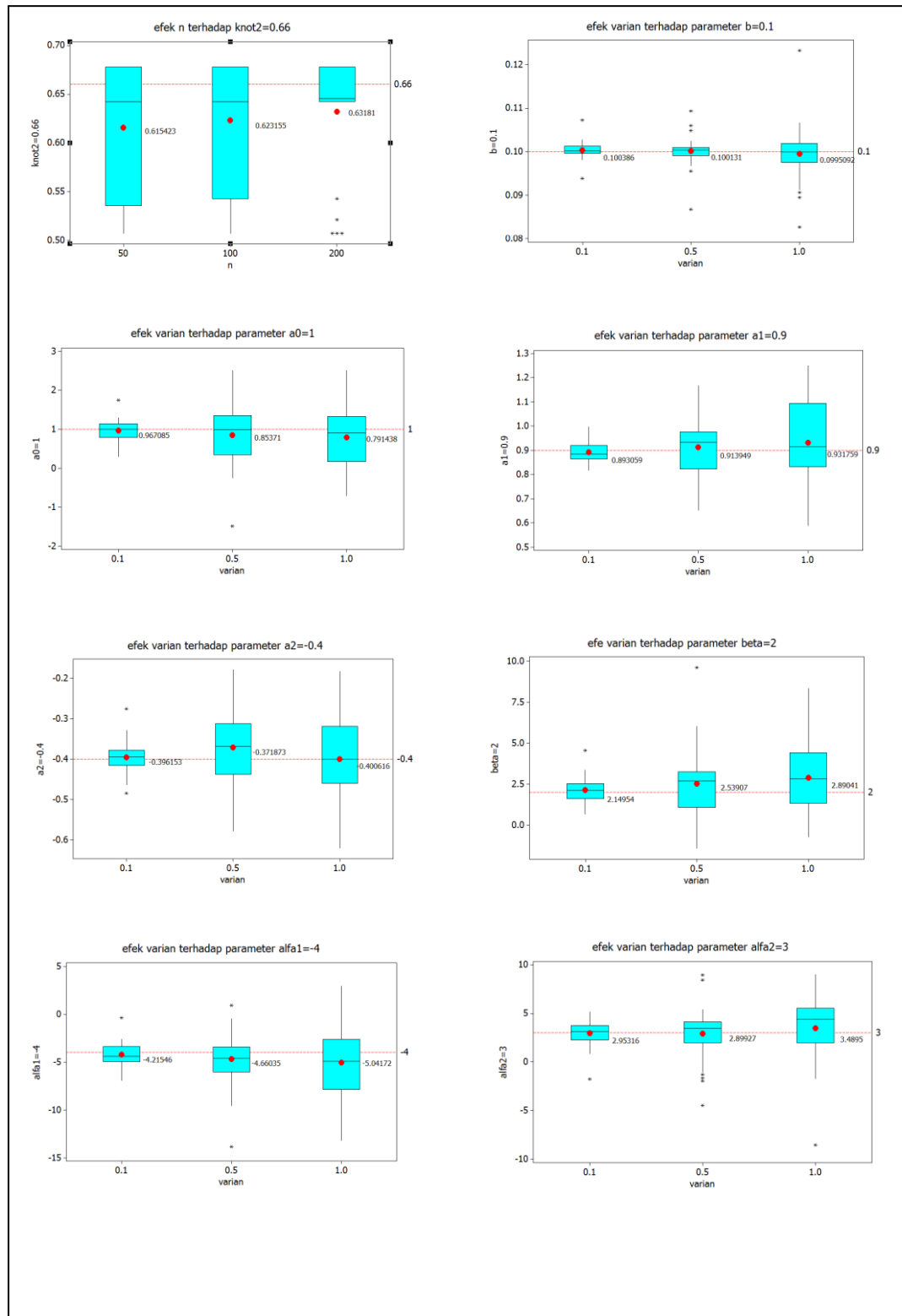


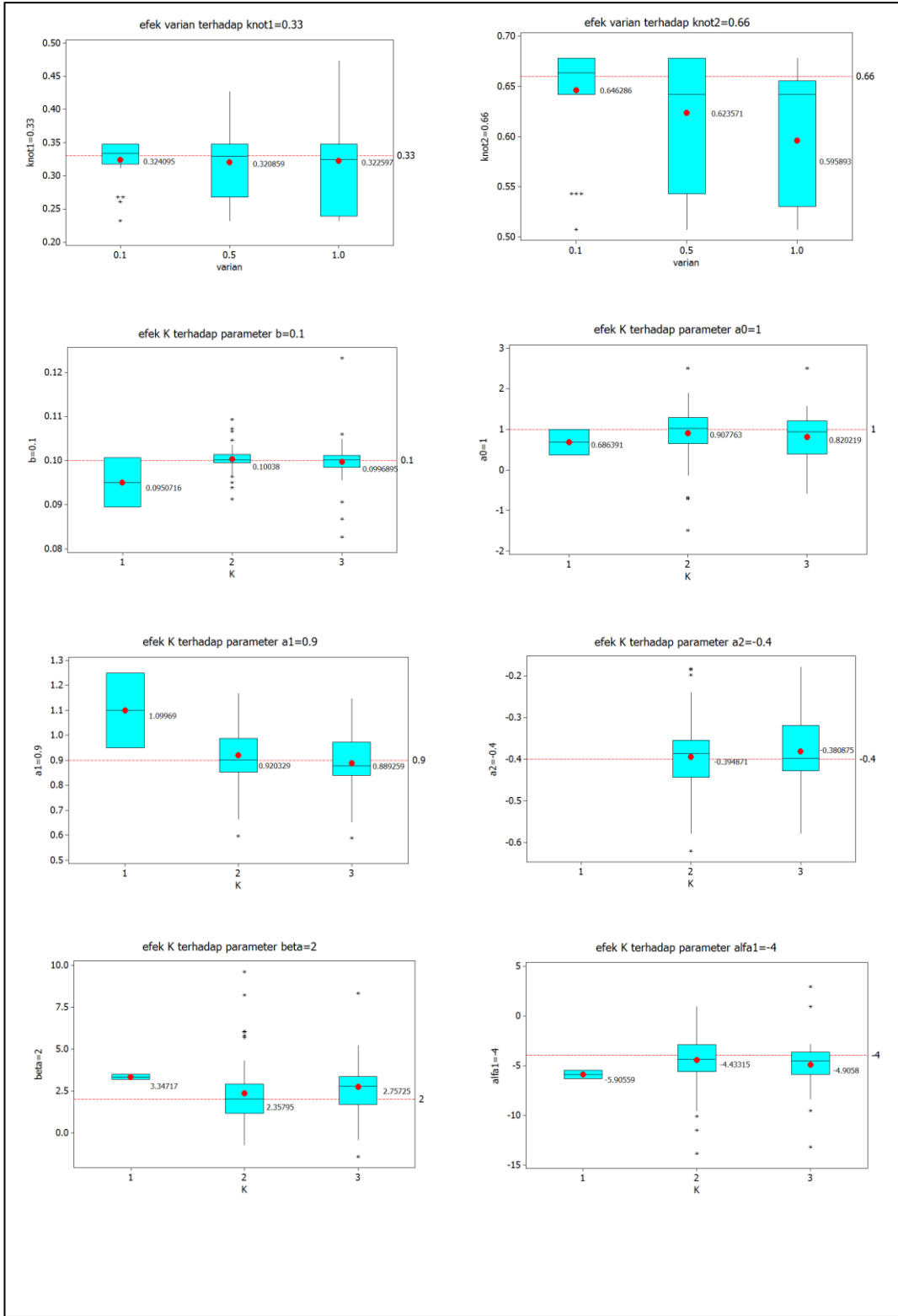


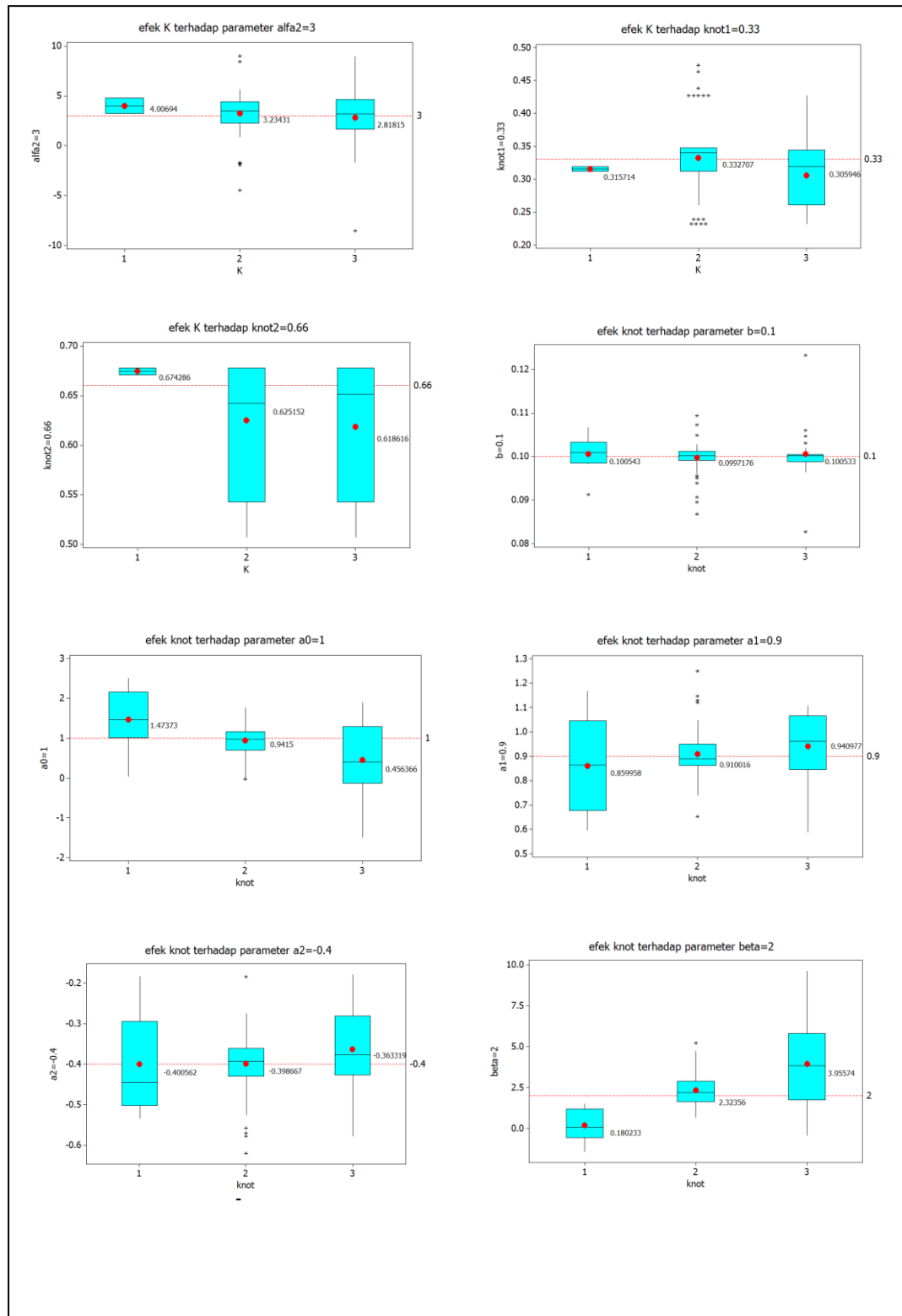


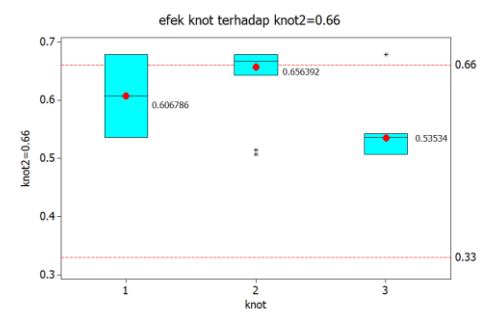
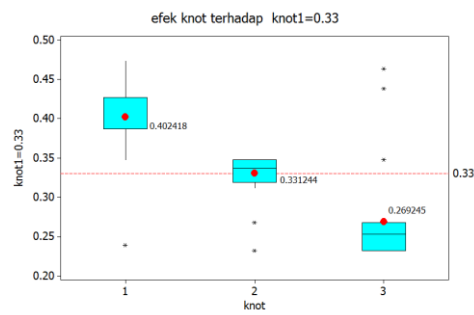
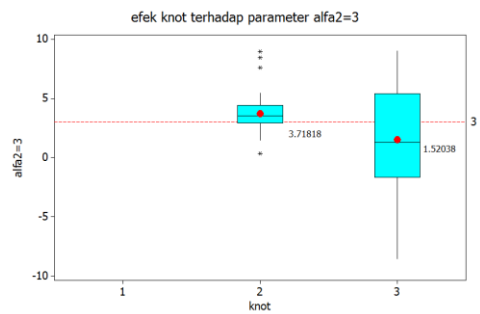
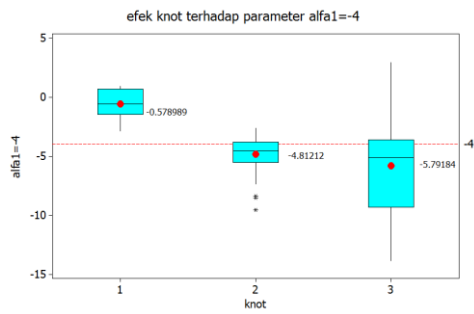
Lampiran 11 Model M_{22}



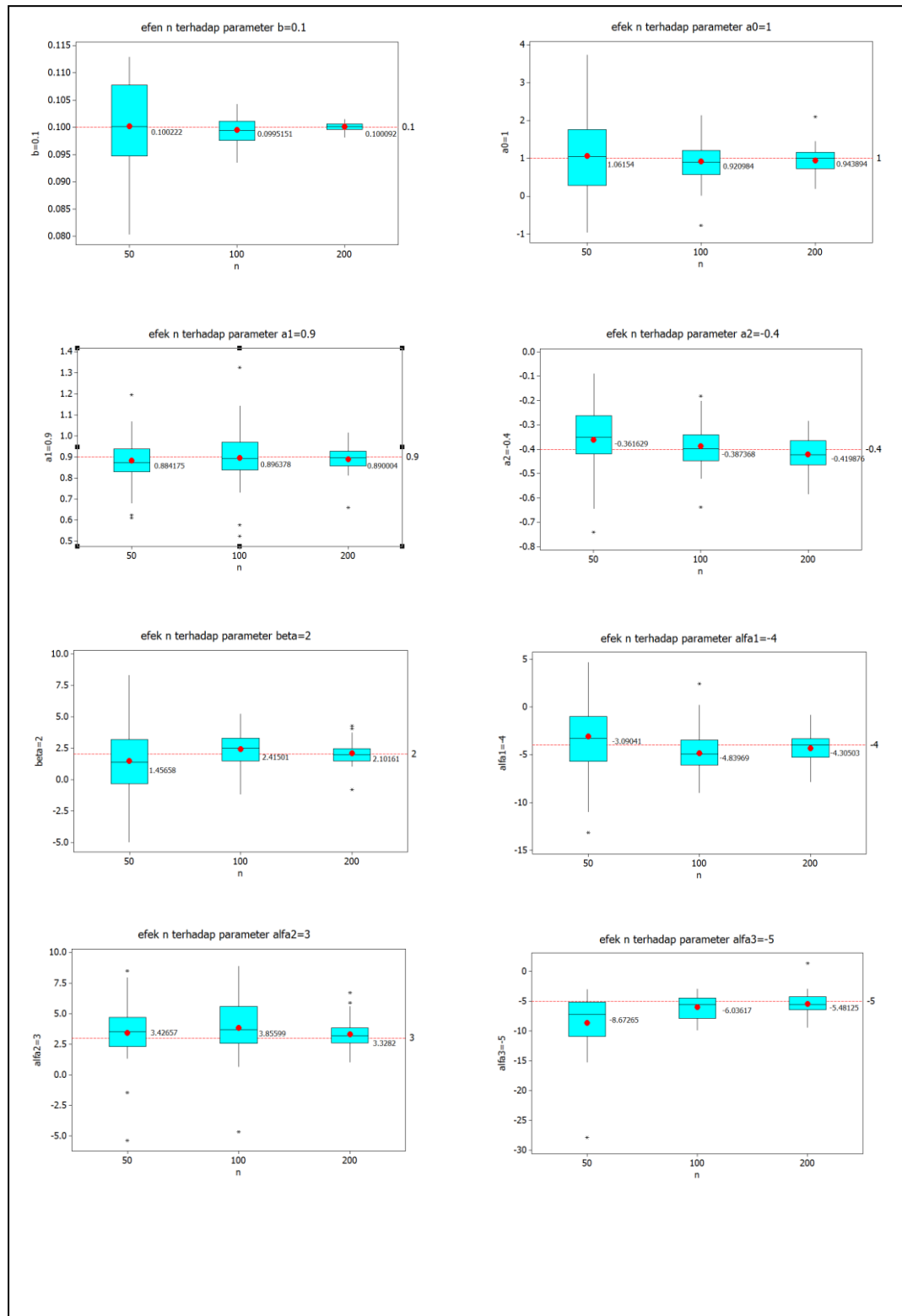


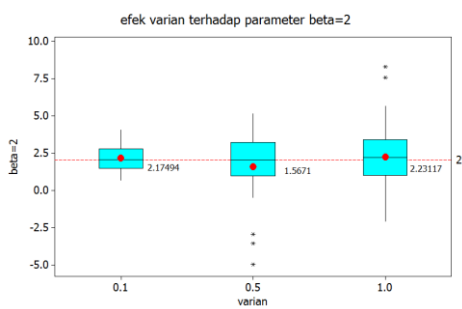
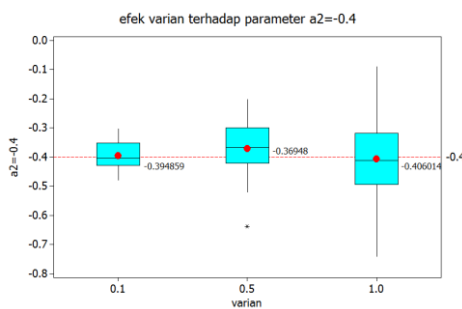
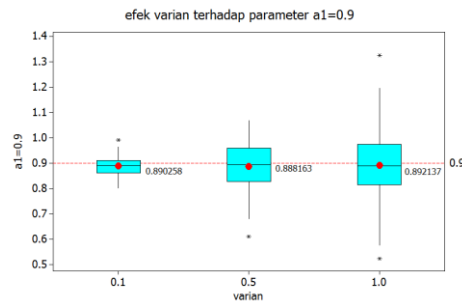
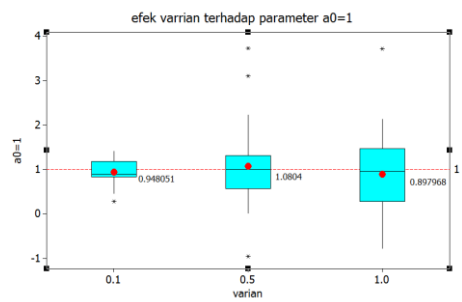
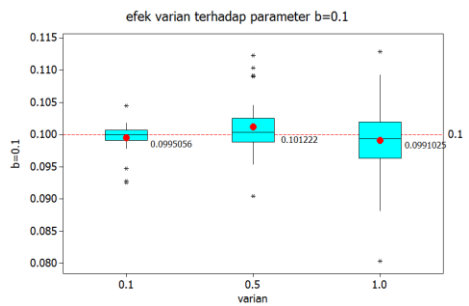
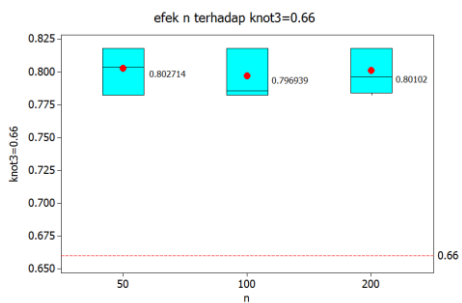
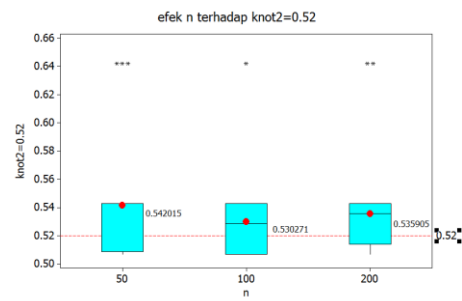
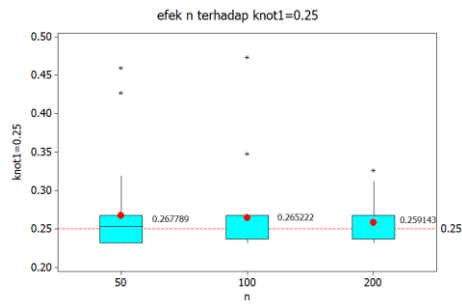


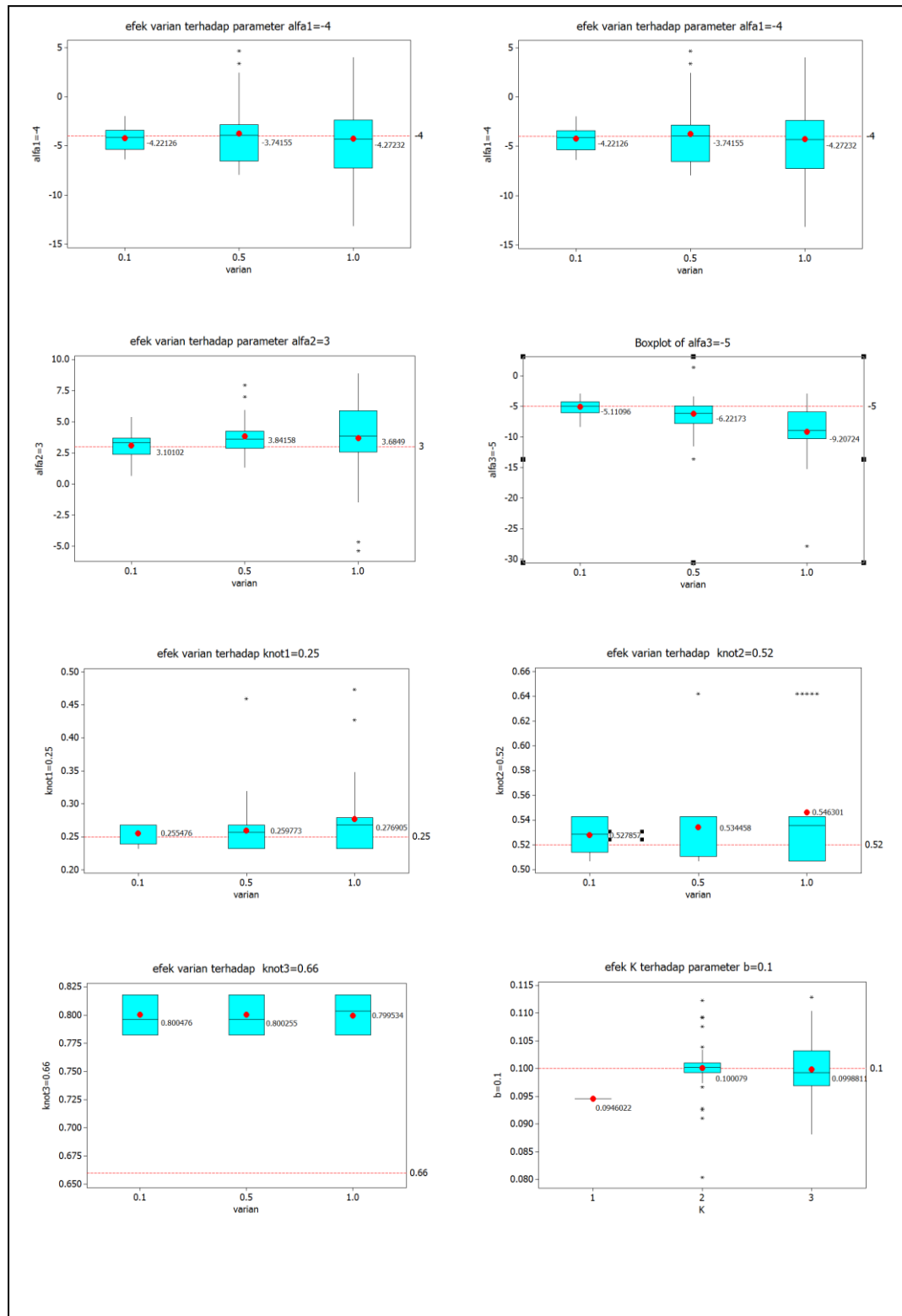


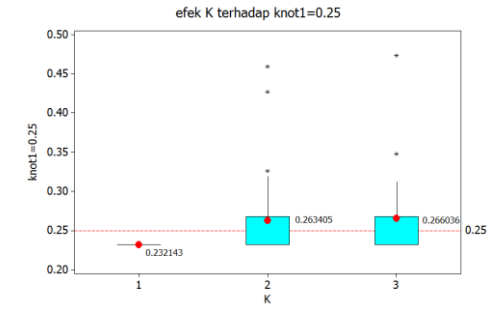
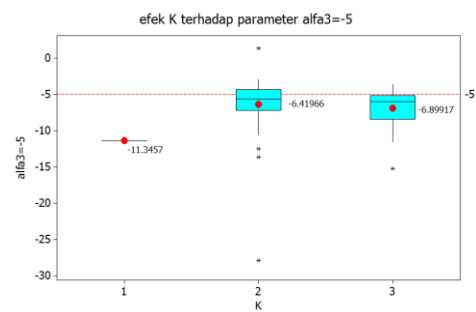
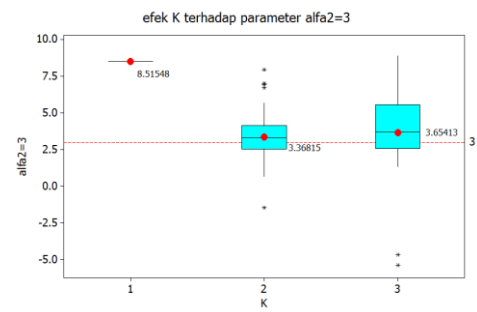
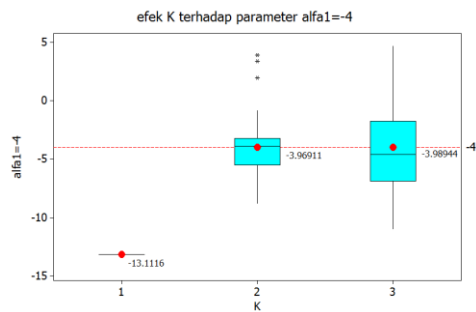
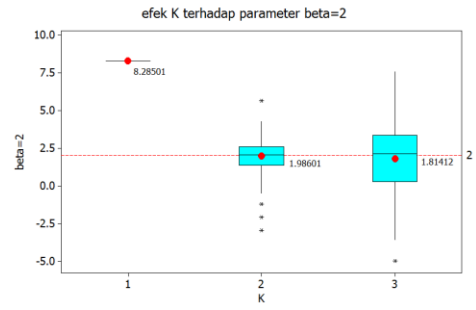
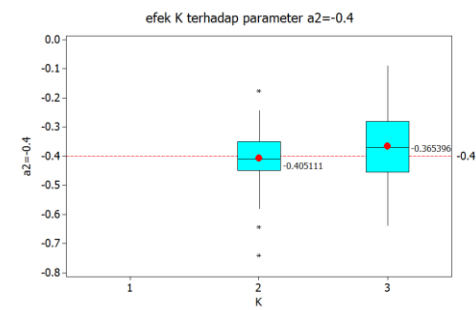
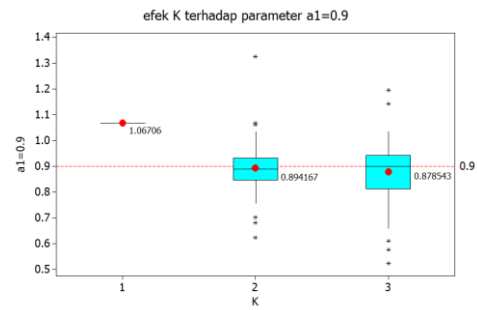
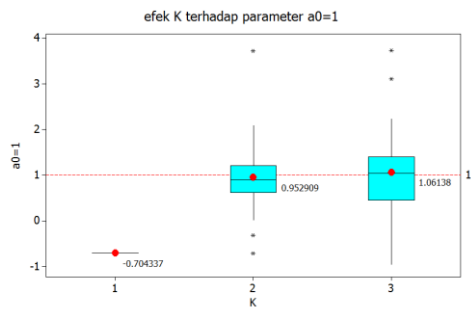


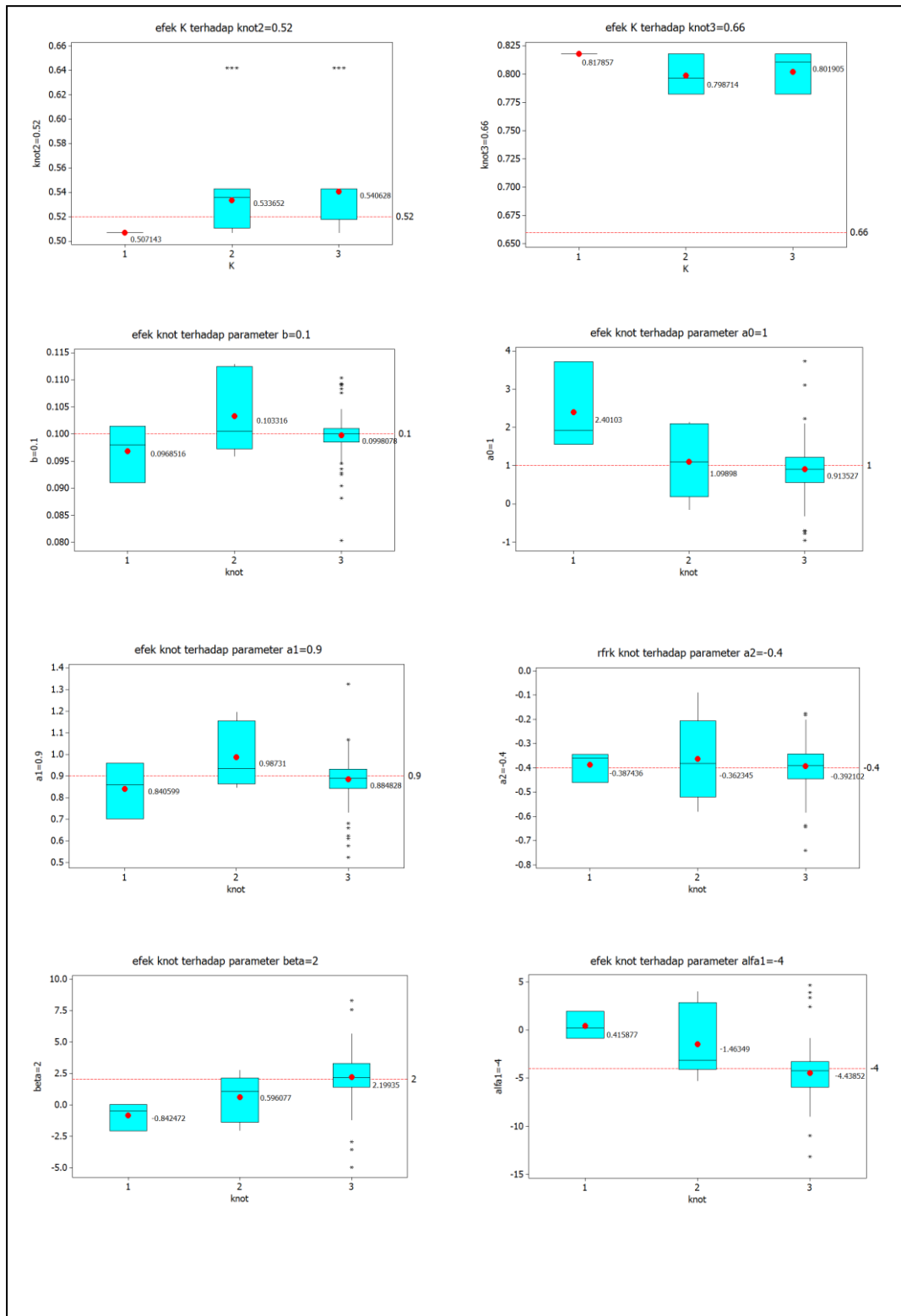
Lampiran 13. Model M_{23}

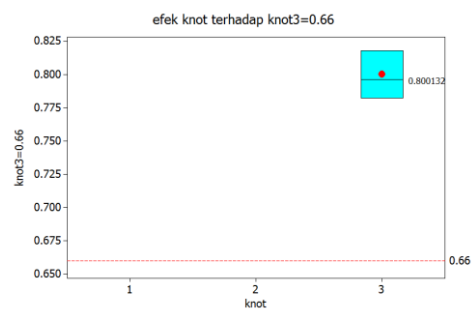
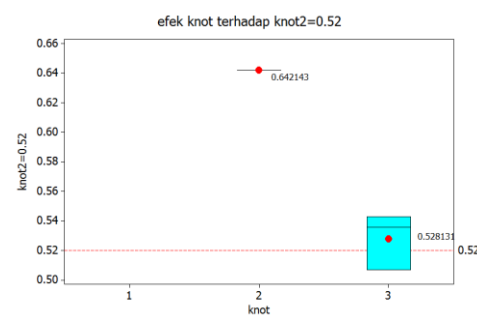
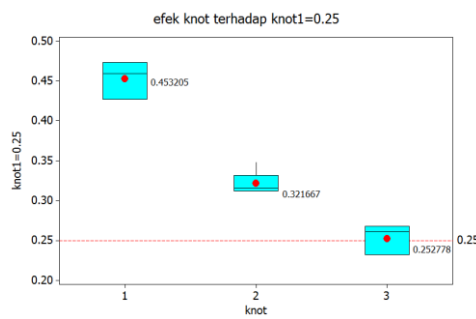
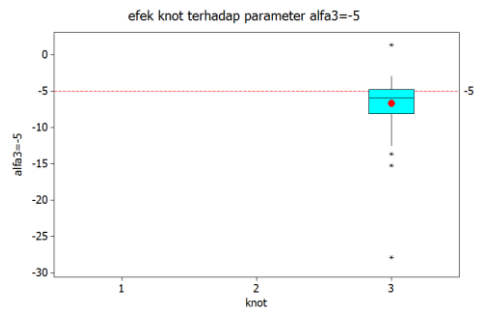
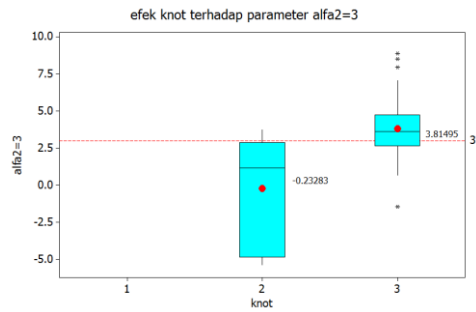




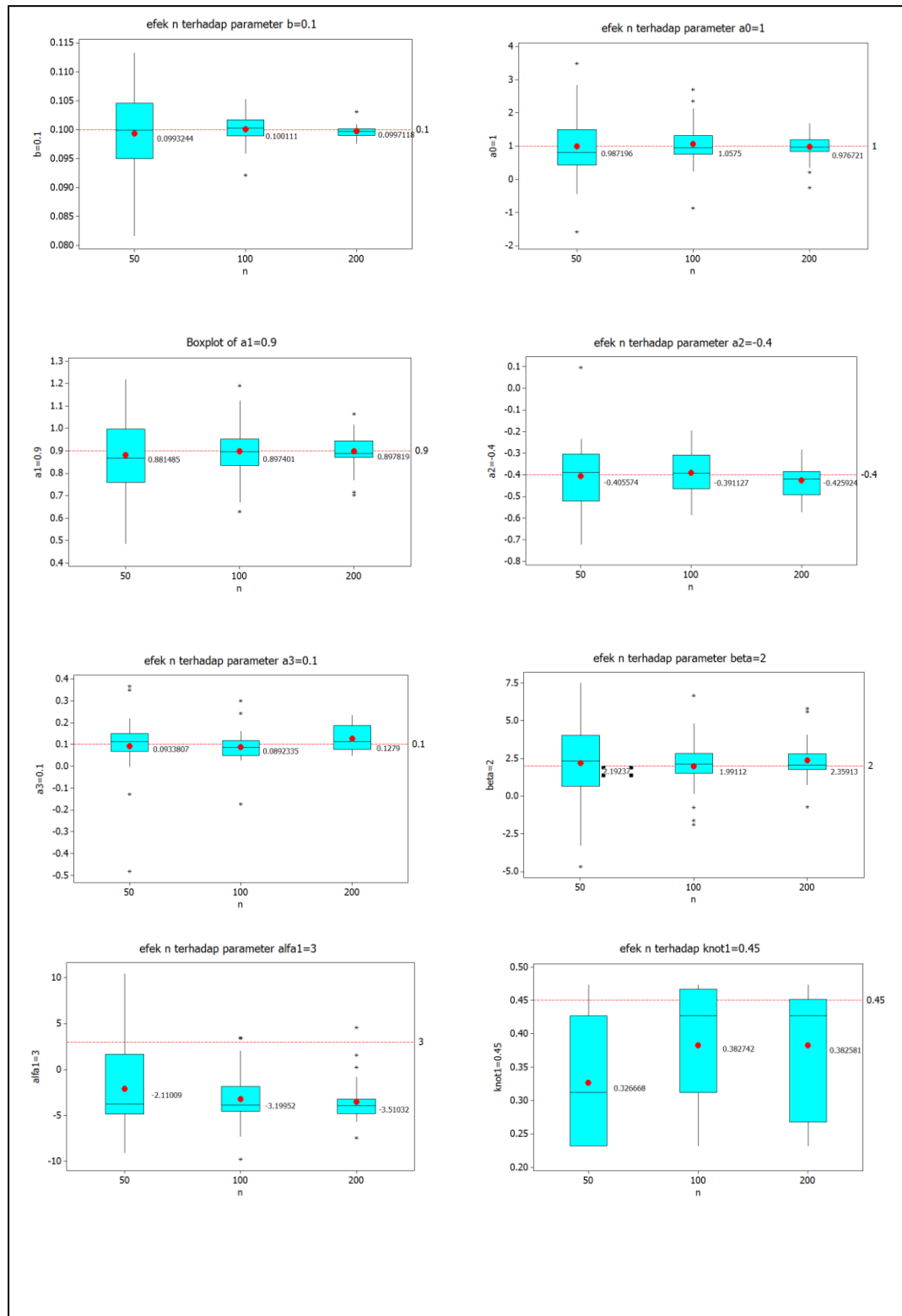








Lampiran 5.15. Model M_{31}



Lampiran 20 Program data riil

```
options(digits=8)
name0='e:/output_spline/datariil/' #read directiory
data=read.csv(paste0(name0,'datariil.csv'),header=T)

mf0=3 #max variabel fourier yg dicari
#mt0=1 #banyaknya variabel spline
kf0=5 #max estimasi nilai k yg dicari

run=function()
{
  table1=matrix(ncol=20,nrow=300)
  colnames(table1)<-
c('K',"nfourier",'labelFourier','nknot','GCV','Rsq','MSE','lambda',paste0('knot',c(1:12)
))
  itable=1
  for ( kf in 1:kf0)
  {
    name1=paste0(name0,'/k=',kf, '/')
    for (mf in 3:3)
    {
      name=paste0(name1,'/',mf,'fourier/')
      mt=4-mf
      library(gtools)
      y=data[,1]
      X=data.frame(data[,-1])
      namevar=names(X)
      com=combinations(ncol(X),mf)
      comvar=combinations(ncol(X),mf,namevar)
      for ( i in 1:(nrow(com)))
      {
        tempf=as.matrix(X[,c(com[i,])]);colnames(tempf)<-c(namevar[c(com[i,])])
        tempdata=cbind(y,tempf,X[,c(com[i,])])
        #data=tempdata
        a1=GCV(tempdata,kf,name,mf,mt,comvar[i,])
        table1[(itable*3-2):(itable*3),1]=kf
        table1[(itable*3-2):(itable*3),2]=mf
        table1[(itable*3-2):(itable*3),3]=unlist(lapply(list(comvar[i,]),paste,collapse='
'))
        table1[(itable*3-2):(itable*3),4:20]=a1$table0
        itable=itable+1
      }
    }
  }
  table1=na.replace(table1,' ')
  write.csv(table1,file=paste(name0,"table 3fourier .csv"))
}
```



```

GCV1=function(data,kf,name,mf,mt,comvari)
{
  #fungsi GCV untuk 1 knot
  #data adalah data yang digunakan
  #kf adalah nilai k yang digunakan
  #name adalah nama folder untuk menyimpan output
  #mf adalah banyanya variabel fourier
  #mt adalah banyanya variabel spline
  #comvari adalah nama variabel yang menjadi var fourier

  options(digits=6)
  #mf=2 #banyaknya variabel fourier
  #mt=2 #banyaknya variabel spline
  mp=ncol(data)-(1+mf+mt)#banyaknya variabel parametrik
  m1=mt

  #load package Matrix dan pracma
  library(Matrix)
  library(pracma)
  library(gtools)

  data=as.matrix(data)
  y=as.matrix(data[,1]) #inisiasi vektor y
  x=as.matrix(data[,-1])
  n=nrow(y)
  m=ncol(x)
  dataA=as.matrix(x[(m+1-mt):m]) #var non Par
  nk=27 #banyak patahan (knot)
  #nl=100 #banyak patahan lambda

  #menginisiasi nilai knot
  knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
  for (i in (1:m1))
  {
    for (j in (1:nk))
    {
      a=seq(min(dataA[,i]),max(dataA[,i]),length.out=nk)
      knot1[j,i]=a[j]
    }
  }
  knot1=as.matrix(knot1[2:(nk-1),])
  aa=rep(1,n)
  data1=matrix(ncol=m1,nrow=n)#in akan menjadi X

  #persamaan deret fourier
  xfou=as.matrix(x[,1:mf])
  W=matrix(nrow=n)

```

```

D=matrix(0,ncol=1,nrow=1)
for (i in (1:mf))
{
  der=funksik(kf,xfou[,i])
  W=cbind(W,der$W)
  D=blkdiag(D,der$D)
}
W=as.matrix(W[,-1])
D=as.matrix(D[-1,-1])
a2=nk-2
nprint=(min(10,a2))

#menginisiasi nilai titik titik lambda
temp1=c()
if (mf==1) dn=8 else dn=5
for ( i in 1:dn)
{
  if (mf==1) temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(1*10^(-(1+i)))) else if (mf==2)
temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(3*10^(-(1+i)))) else
  temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(5*10^(-(1+i))))
  temp1=c(temp1,temp0)
}
if (mf==1) lambda11=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.2,1,by=0.02),temp1)))) else
lambda11=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.2,1,by=0.15),temp1,1))))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^-
3,by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002)))
options(expressions=1e5)
lambda2=permutations(length(lambda11),mf,lambda11,repeats.allowed = T)
options(expressions=5000)

lambda1=lambda2
nl=nrow(lambda1)
#membuat matrix kosong untuk nilai GCV,MSE,Rsq,SSE,SST,SSR
GCV=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
MSE=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
Rsq=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
SSE=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
SST=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
SSR=matrix(nrow=a2,ncol=nl)
lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-c(1:nl);colnames(MSE)<-
c(1:nl);colnames(Rsq)<-c(1:nl)
for(i in 1:a2)
{
  lambda=rbind(lambda,t(lambda2))
}
lambda=lambda[-1,]

for (i in 1:a2)

```

```

{
  #menghitung knot
  for (j in 1:m1)
  {
    for (k in 1:n)
    {
      #i=1;k=1;j=1
      if (dataA[k,(j)]<knot1[i,j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=dataA[k,(j)]-knot1[i,j]
    }
  }
  #menghitung knot
  }
}
satu=rep(1,n)
X=cbind(satu,dataA,data1) # nilai matrix x (sudah termasuk nilai knot)
I1=diag(ncol(X))
I2=diag(nrow(X))
for (j in 1:nl)
{
  #menghitung nilai estimasi
  lambdaA=matrix(ncol=1)
  for (k in 1:mf)
  {
    lambdaA=cbind(lambdaA,matrix(c(rep(lambda2[j,k],(ncol(D)/mf))),nrow=1))
  }
  lambdaA=lambdaA[,-1]
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambdaA*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1)%*%B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
  C=W)%*%A1+X)%*%B3
  yhat=C)%*%y      # mencari nilai yhat
  SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2) #mencari SSE
  SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2) #mencari SSR
  SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j] #mencari SST
  Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100 #mencari R square
  MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n #mencari MSE
  GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
  GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh ##mencari GCV
}
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

#menyiapkan output sort GCV terkecil
R11=matrix(ncol=1); colnames(R11)<-"Rsq"
MSE11=matrix(ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(ncol=1);colnames(ke11)<-"Knot_ke"
kelam11=matrix(ncol=1);colnames(kelam11)<-"lambda_ke"

```

```

for ( i in 1:nl)
{
  ke11=rbind(ke11,matrix(c(1:a2),ncol=1))
  R11=rbind(R11,matrix(Rsq[i],ncol=1))
  MSE11=rbind(MSE11,matrix(MSE[i],ncol=1))
  GCV11=rbind(GCV11,matrix(GCV[i],ncol=1))
  kelam11=rbind(kelam11,matrix(rep(i,a2),ncol=1))
}
ke11=matrix(ke11[-1,],ncol=1)
R11=matrix(R11[-1,],ncol=1)
MSE11=matrix(MSE11[-1,],ncol=1)
GCV11=matrix(GCV11[-1,],ncol=1)
kelam11=matrix(kelam11[-1,],ncol=1)

knot11=matrix(nrow=nrow(ke11),ncol=ncol(knot1));
L11=matrix(nrow=nrow(ke11),ncol=ncol(lambda2));
for ( i in 1:nrow(ke11))
{
  knot11[i,]=knot1[ke11[i],]
  L11[i,]=lambda2[kelam11[i],]
}

gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11
dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  #print(i)
  s1=min(gab11copy[,1])
  pos=which(s1==gab11copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
  posdellambda=0
  for (j in 1:mf)
  {
    posdellambda=c(posdellambda,which(gab11copy[pos,(3+j)]==gab11copy[(3+j)]))
  }
  posdellambda=posdellambda[-1]
  posdelknot =which(gab11copy[pos,4+mf]==gab11copy[,4+mf])
  gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-
dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,4+mf]),]
colnames(dataprint)<-c("GCV","Rsq","MSE",paste0('lambda',c(1:mf)),"knot_ke",
  paste0('knot',c(1:mt),1))
colnames(gab11)<-c("GCV","Rsq","MSE",paste0('lambda',c(1:mf)),"knot_ke",
  paste0('knot',c(1:mt),1))

```

```

#save hasil menggunakan file csv
write.csv(gab11,file=paste(name,"output data All 1 knot k=",kf," var fourier
",comvari,".csv"))
write.csv(dataprint,file=paste(name,"output data yang di print 1 knot k=",kf," var
fourier ",comvari,".csv"))

#print output
cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline 1 knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE    =",dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprint[1,c(4:(4+mf-1))], "\n")
cat("Knot   =",dataprint[1,(4+mf+1):ncol(dataprint)], "\n")
cat("fourier =",comvari," \n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprint)

#membuat plot antara GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
pos=which(min(gab11[,1])==gab11[,1])
if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
#posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[,5])
posknot=which(dataprint[1,4+mf]==gab11[,4+mf])
logl=matrix(ncol=mf,nrow=nrow(gab11))
for ( j in 1:(mf))
{
  temp=0
  temp=which(dataprint[1,3+j]==gab11[,3+j])
  logl[1:length(temp),j]=temp
}
mypath <- file.path(paste(name,"plot_1 knot K=",kf," var fourier ",comvari,".jpg",
sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=694)
par(mfrow=c((ceiling(mf/2)),2))
for ( i in 1:mf)
{
  posl=c(na.omit(c(logl[,i])))
  gabpos=c(posl,posknot)
  if (mf==1) posfix=gabpos else posfix=gabpos[duplicated(c(posl,posknot))]
  while ((anyDuplicated(posfix))!=0)
  {
    posfix=posfix[duplicated(posfix)]
  }
  pos2=which(pos==posfix)
  posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
  posatas=pos2+(min(10,length(posfix)-pos2))
  xyplot=gab11[posfix[posbawah:posatas],c(1,3+i)]

```

```

xyplot=xyplot[order(xyplot[,2]),]
gcvplot=xyplot[,1];
lambdaplot=xyplot[,2]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("Plot_ 1 knot, k=",kf,"lambda ke ",i, "var fourier ",comvari))
}
#save plot GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
dev.off()
par(mfrow=c(1,1))

#lambdaplot=gab11[posknot,4]
#gcvplot=gab11[posknot,1]
#par(mfrow=c(3,2))

#plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=past
e("knot1 optimum k=",kf))

#membuat matrix x untuk estimasi s=-elanjutnya
lambda1=dataprint[1,c(4:(4+mf-1))]
knotgcv=matrix(dataprint[1,(4+mf+1):ncol(dataprint)],nrow=1)
for (j in 1:m1)
{
  for (k in 1:n)
  {
    if (dataA[k,j])<knotgcv[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=dataA[k,j]-knotgcv[j]
  }
}
X=cbind(satu,dataA,data1)

list(D=D,knot=knotgcv,mingcv=dataprint[1,1],Rsqgcv=dataprint[1,2],W=W,X=X,lam
bda=lambda1,msegcv=dataprint[1,3])
}

GCV2=function(data,kf,name,mf,mt,comvari)
{
  #fungsi GCV untuk 2 knot
  #data adalah data yang digunakan
  #kf adalah nilai k yang digunakan
  #name adalah nama folder untuk menyimpan output
  #mf adalah banyanya variabel fourier
  #mt adalah banyanya variabel spline
  #comvari adalah nama variabel yang menjadi var fourier

  options(digits=6)
  #mf=2 #banyaknya variabel fourier
  #mt=2 #banyaknya variabel spline
  mp=ncol(data)-(1+mf+mt)

```

```

m1=mt
library(Matrix)
library(pracma)
library(gtools)

data=as.matrix(data)
y=as.matrix(data[,1]) #inisiasi vektor y
x=as.matrix(data[,-1])
n=nrow(y)
m=ncol(x)
dataA=as.matrix(x[(m+1-mt):m]) #var non Par
nk=17 #banyak patahan (knot)
#nl=100 # banyak patahan lambda

#menginisiasi nilai knot
knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
for (i in (1:m1))
{
  for (j in (1:(nk)))
  {
    a=seq(min(dataA[,i]),max(dataA[,i]),length.out=nk)
    knot1[j,i]=a[j]
  }
}
knot=as.matrix(knot1[2:((nk)-1),])
a2=nrow(knot)#a2=nk-2
z=(a2*(a2-1)/2)
knot2=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:m1))
{
  knot1=rbind(rep(NA,2))
  for ( j in 1:(a2-1))
  {
    for (k in (j+1):a2)
    {
      xx=cbind(knot[j,i],knot[k,i])
      knot1=rbind(knot1,xx)
    }
  }
  knot2=cbind(knot2,knot1)
}
knot2=knot2[2:(z+1),2:(2*m1+1)]
a3=nrow(knot2)
nprint=(min(10,a3))
aa=rep(1,n)

#persamaan deret fourier
xfou=as.matrix(x[,1:mf])
W=matrix(nrow=n)

```

```

D=matrix(0,ncol=1,nrow=1)
for (i in (1:mf))
{
  der=funksik(kf,xfou[,i])
  W=cbind(W,der$W)
  D=blkdiag(D,der$D)
}
W=as.matrix(W[,-1])
D=as.matrix(D[-1,-1])
data1=matrix(ncol=(2*m1),nrow=n)#in akan menjadi X

#menginisiasi nilai titik titik lambda
temp1=c()
if (mf==1) dn=8 else dn=5
for ( i in 1:dn)
{
  if (mf==1) temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(1*10^(-(1+i)))) else if (mf==2)
temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(3*10^(-(1+i)))) else
  temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(5*10^(-(1+i))))
  temp1=c(temp1,temp0)
}
if (mf==1) lambda11=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.2,1,by=0.02),temp1)))) else
lambda11=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.2,1,by=0.15),temp1,1))))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^-
3,by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002)))
options(expressions=1e5)
lambda2=permutations(length(lambda11),mf,lambda11,repeats.allowed = T)
options(expressions=5000)

lambda1=lambda2
nl=nrow(lambda1)

#membuat matrix kosong untuk nilai GCV,MSE,Rsq,SSE,SST,SSR
GCV=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
MSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
Rsq=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SST=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSR=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-c(1:nl);colnames(MSE)<-
c(1:nl);colnames(Rsq)<-c(1:nl)
for(i in 1:a3)
{
  lambda=rbind(lambda,t(lambda2))
}
lambda=lambda[-1,]

for (i in 1:a3)

```



```

{
  #menghitung knot
  for (j in 1:(2*m1))
  {
    if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
    for (k in 1:n)
    {
      if (dataA[k,b]<knot2[i,j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=dataA[k,b]-knot2[i,j]
    }
  }
#menghitung knot
}
}
satu=rep(1,n)
X=cbind(satu,dataA,data1) # nilai matrix x (sudah termasuk nilai knot)
I1=diag(ncol(X))
I2=diag(nrow(X))
for (j in 1:nl)
{
  #menghitung nilai estimasi
  lambdaA=matrix(ncol=1)
  for (k in 1:mf)
  {
    lambdaA=cbind(lambdaA,matrix(c(rep(lambda2[j,k],(ncol(D)/mf))),nrow=1))
  }
  lambdaA=lambdaA[,-1]
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambdaA*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1)%*%B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
  C=W)%*%A1+X)%*%B3
  yhat=C)%*%y      # mencari nilai yhat
  SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2) #mencari SSE
  SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2) #mencari SSR
  SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j] #mencari SST
  Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100 #mencari R square
  MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n #mencari MSE
  GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
  GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh ##mencari GCV
}
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

#menyiapkan output sort GCV terkecil
R11=matrix(ncol=1); colnames(R11)<-"Rsq"
MSE11=matrix(ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(ncol=1);colnames(ke11)<-"Knot_ke"
kelam11=matrix(ncol=1);colnames(kelam11)<-"lambda_ke"

```

```

for ( i in 1:nl)
{
  ke11=rbind(ke11,matrix(c(1:a3),ncol=1))
  R11=rbind(R11,matrix(Rsq[,i],ncol=1))
  MSE11=rbind(MSE11,matrix(MSE[,i],ncol=1))
  GCV11=rbind(GCV11,matrix(GCV[,i],ncol=1))
  kelam11=rbind(kelam11,matrix(rep(i,a3),ncol=1))
}
ke11=matrix(ke11[-1,],ncol=1)
R11=matrix(R11[-1,],ncol=1)
MSE11=matrix(MSE11[-1,],ncol=1)
GCV11=matrix(GCV11[-1,],ncol=1)
kelam11=matrix(kelam11[-1,],ncol=1)

knot11=matrix(nrow=nrow(ke11),ncol=ncol(knot2));
L11=matrix(nrow=nrow(ke11),ncol=ncol(lambda2));
for ( i in 1:nrow(ke11))
{
  knot11[i,]=knot2[ke11[i,]]
  L11[i,]=lambda2[kelam11[i,]]
}

gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11
dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  s1=min(gab11copy[,1])
  pos=which(s1==gab11copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
  posdellambda=0
  for (j in 1:mf)
  {
    posdellambda=c(posdellambda,which(gab11copy[pos,(3+j)]==gab11copy[, (3+j)]))
  }
  posdellambda=posdellambda[-1]
  posdelknot =which(gab11copy[pos,4+mf]==gab11copy[,4+mf])
  gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,5]),]
colnames(dataprint)<-c("GCV","Rsq","MSE",paste0('lambda',c(1:mf)),"knot_ke",
  paste0('_',c(1:(2*mt))))
colnames(gab11)<-c("GCV","Rsq","MSE",paste0('lambda',c(1:mf)),"knot_ke",
  paste0('_',c(1:(2*mt))))
#save hasil menggunakan file csv

```

```

write.csv(gab11,file=paste(name,"output data All 2 knot k=",kf," var fourier
",comvari,".csv"))
write.csv(dataprint,file=paste(name,"output data yang di print 2 knot k=",kf," var
fourier ",comvari,".csv"))

#print output
cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline 2 knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   = ",dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare = ",dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE    = ",dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda = ",dataprint[1,c(4:(4+mf-1))], "\n")
cat("Knot   = ",dataprint[1,(4+mf+1):ncol(dataprint)], "\n")
cat("fourier = ",comvari, "\n")

cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprint)

#membuat plot antara GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
pos=which(min(gab11[,1])==gab11[,1])
if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
#posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[,5])
posknot=which(dataprint[1,4+mf]==gab11[,4+mf])
logl=matrix(ncol=mf,nrow=nrow(gab11))
for ( j in 1:(mf))
{
  temp=0
  temp=which(dataprint[1,3+j]==gab11[,3+j])
  logl[1:length(temp),j]=temp
}
mypath <- file.path(paste(name,"plot_2 knot K=",kf," var fourier ",comvari,".jpg",
sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=694)
par(mfrow=c((ceiling(mf/2)),2))
for ( i in 1:mf)
{
  posl=c(na.omit(c(logl[,i])))
  gabpos=c(posl,posknot)
  if (mf==1) posfix=gabpos else posfix=gabpos[duplicated(c(posl,posknot))]
  while ((anyDuplicated(posfix))!=0)
  {
    posfix=posfix[duplicated(posfix)]
  }
  pos2=which(pos==posfix)
  posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
  posatas=pos2+(min(10,length(posfix)-pos2))
  xyplot=gab11[posfix[posbawah:posatas],c(1,3+i)]
  xyplot=xyplot[order(xyplot[,2]),]
}

```

```

gcvplot=xyplot[,1];
lambdaplot=xyplot[,2]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("Plot_ 1 knot, k=",kf,"lambda ke ",i," var fourier ",comvari))
}
#save plot GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
dev.off()
par(mfrow=c(1,1))

#test
#lambdaplot=gab11[posknot,4]
#gcvplot=gab11[posknot,1]
#par(mfrow=c(3,2))

#plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=past
e("knot1 optimum k=",kf))

#membuat matrix x untuk estimasi selanjutnya
lambda1=dataprint[1,c(4:(4+mf-1))]
knotgcv=matrix(dataprint[1,(4+mf+1):ncol(dataprint)],nrow=1)
for (j in 1:(2*m1))
{
  if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
  for (k in 1:n)
  {
    if (dataA[k,b]<knotgcv[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=dataA[k,b]-knotgcv[j]
  }
}
X=cbind(satu,dataA,data1)

list(D=D,knot=knotgcv,mingcv=dataprint[1,1],Rsqqgcv=dataprint[1,2],W=W,X=X,lam
bda=lambda1,msegcv=dataprint[1,3])
}

GCV3=function(data,kf,name,mf,mt,comvari)
{
  #fungsi GCV untuk 3 knot
  #data adalah data yang digunakan
  #kf adalah nilai k yang digunakan
  #name adalah nama folder untuk menyimpan output
  #mf adalah banyanya variabel fourier
  #mt adalah banyanya variabel spline
  #comvari adalah nama variabel yang menjadi var fourier

  options(digits=6)
  #mf=2 #banyaknya variabel fourier
  #mt=2 #banyaknya variabel spline

```

```

mp=ncol(data)-(1+mf+mt)#banyaknya variabel parametrik
m1=mt

#load package Matrix dan pracma
library(Matrix)
library(pracma)
library(gtools)

data=as.matrix(data)
y=as.matrix(data[,1])#inisiasi vektor y
x=as.matrix(data[,-1])
n=nrow(y)
m=ncol(x)
dataA=as.matrix(x[(m+1-mt):m]) #var non Par
nk=12 #banyak patahan (knot)

#menginisiasi nilai knot
knot1=matrix(ncol=m1,nrow=nk)
for (i in (1:m1))
{
  for (j in (1:nk))
  {
    a=seq(min(dataA[,i]),max(dataA[,i]),length.out=nk)
    knot1[j,i]=a[j]
  }
}
knot=as.matrix(knot1[2:((nk)-1),])
a2=nrow(knot)#a2=nk-2
z=(a2*(a2-1)*(a2-2)/6)
knot1=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:m1))
{
  knot2=rbind(rep(NA,3))
  for ( j in 1:(a2-2))
  {
    for (k in (j+1):(a2-1))
    {
      for (g in (k+1):a2)
      {
        xx=cbind(knot[j,i],knot[k,i],knot[g,i])
        knot2=rbind(knot2,xx)
      }
    }
  }
  knot1=cbind(knot1,knot2)
}
knot1=knot1[2:(z+1),2:(3*m1+1)]
a3=nrow(knot1)
nprint=(min(10,a3))

```

```

aa=rep(1,n)

#persamaan deret fourier
xfou=as.matrix(x[,1:mf])
W=matrix(nrow=n)
D=matrix(0,ncol=1,nrow=1)
for (i in (1:mf))
{
  der=funksik(kf,xfou[,i])
  W=cbind(W,der$W)
  D=blkdiag(D,der$D)
}
W=as.matrix(W[,-1])
D=as.matrix(D[-1,-1])
data1=matrix(ncol=3*m1,nrow=n)#in akan menjadi X

#menginisiasi nilai titik titik lambda
temp1=c()
if (mf==1) dn=8 else dn=5
for ( i in 1:dn)
{
  if (mf==1) temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(1*10^(-(1+i)))) else if (mf==2)
temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(3*10^(-(1+i)))) else
  temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(5*10^(-(1+i))))
  temp1=c(temp1,temp0)
}
if (mf==1) lambda11=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.2,1,by=0.02),temp1)))) else
lambda11=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.2,1,by=0.15),temp1,1))))
#lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^-
3,by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002)))
options(expressions=1e5)
lambda2=permutations(length(lambda11),mf,lambda11,repeats.allowed = T)
options(expressions=5000)

lambda1=lambda2
nl=nrow(lambda1)

#membuat matrix kosong untuk nilai GCV,MSE,Rsq,SSE,SST,SSR
GCV=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
MSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
Rsq=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSE=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SST=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
SSR=matrix(nrow=a3,ncol=nl)
lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-c(1:nl);colnames(MSE)<-
c(1:nl);colnames(Rsq)<-c(1:nl)
for(i in 1:a3)
{
  lambda=rbind(lambda,t(lambda2))
}

```

```

}
lambda=lambda[-1,]

for (i in 1:a3)
{
  #menghitung knot
  for (j in 1:ncol(knot1))
  {
    b=ceiling(j/3)
    for (k in 1:n)
    {
      if (dataA[k,b]<knot1[i,j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=dataA[k,b]-knot1[i,j]
    }
  }
}

#menghitung knot

satu=rep(1,n)
X=cbind(satu,dataA,data1)# nilai matrix x (sudah termasuk nilai knot)
I1=diag(ncol(X))
I2=diag(nrow(X))
for (j in 1:nl)
{
  #menghitung nilai estimasi
  lambdaA=matrix(ncol=1)
  for (k in 1:mf)
  {
    lambdaA=cbind(lambdaA,matrix(c(rep(lambda2[j,k],(ncol(D)/mf))),nrow=1))
  }
  lambdaA=lambdaA[,-1]
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambdaA*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1%*%B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
  C=W)%*%A1+X)%*%B3
  yhat=C)%*%y# mencari nilai yhat
  SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2)#mencari SSE
  SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2)#mencari SSR
  SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j]#mencari SST
  Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100#mencari R square
  MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n#mencari MSE
  GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
  GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh ##mencari GCV
}
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

#menyiapkan output sort GCV terkecil

```

```

R11=matrix(ncol=1); colnames(R11)<-"Rsqr"
MSE11=matrix(ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(ncol=1);colnames(ke11)<-"Knot_ke"
for ( i in 1:nl)
{
  ke11=rbind(ke11,matrix(c(1:a3),ncol=1))
  R11=rbind(R11,matrix(Rsq[i],ncol=1))
  MSE11=rbind(MSE11,matrix(MSE[i],ncol=1))
  GCV11=rbind(GCV11,matrix(GCV[i],ncol=1))
}
ke11=matrix(ke11[-1,],ncol=1)
R11=matrix(R11[-1,],ncol=1)
MSE11=matrix(MSE11[-1,],ncol=1)
GCV11=matrix(GCV11[-1,],ncol=1)
kelam11=matrix(ncol=1);colnames(kelam11)<-"lambda_ke"
for ( i in 1:nl)
{
  kelam11=rbind(kelam11,matrix(rep(i,a3),ncol=1))
}
kelam11=matrix(kelam11[-1,],ncol=1)

knot11=matrix(nrow=nrow(ke11),ncol=ncol(knot1));
L11=matrix(nrow=nrow(ke11),ncol=ncol(lambda2));
for ( i in 1:nrow(ke11))
{
  knot11[i,]=knot1[ke11[i],]
  L11[i,]=lambda2[kelam11[i],]
}
gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11
dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  s1=min(gab11copy[,1])
  pos=which(s1==gab11copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
  posdellambda=0
  for (j in 1:mf)
  {
    posdellambda=c(posdellambda,which(gab11copy[pos,(3+j)]==gab11copy[, (3+j)]))
  }
  posdellambda=posdellambda[-1]
  posdelknot =which(gab11copy[pos,4+mf]==gab11copy[,4+mf])
  gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}

```



```

dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,5]),]
colnames(dataprint)<-c("GCV","Rsqr","MSE",paste0('lambda',c(1:mf)), "knot_ke",
  paste0('_',c(1:(3*mt))))
colnames(gab11)<-c("GCV","Rsqr","MSE",paste0('lambda',c(1:mf)), "knot_ke",
  paste0('_',c(1:(3*mt))))
#save hasil menggunakan file csv
write.csv(gab11,file=paste(name,"output data All 3 knot k=",kf," var fourier
",comvari,".csv"))
write.csv(dataprint,file=paste(name,"output data yang di print 3 knot k=",kf," var
fourier ",comvari,".csv"))

#print output
cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline 3 knot k=",kf, "\n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE   =",dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprint[1,c(4:(4+mf-1))], "\n")
cat("Knot   =",dataprint[1,(4+mf+1):ncol(dataprint)], "\n")
cat("fourier =",comvari, "\n")
cat("Nilai GCV 25 ", "\n")
print(dataprint)

#membuat plot antara GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
pos=which(min(gab11[,1])==gab11[,1])
if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
#posknot =which(gab11[pos,5]==gab11[,5])
posknot=which(dataprint[1,4+mf]==gab11[,4+mf])
logl=matrix(ncol=mf,nrow=nrow(gab11))
for ( j in 1:(mf))
{
  temp=0
  temp=which(dataprint[1,3+j]==gab11[,3+j])
  logl[1:length(temp),j]=temp
}
mypath <- file.path(paste(name,"plot_3 knot K=",kf," var fourier ",comvari,".jpg",
sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=694)
par(mfrow=c((ceiling(mf/2)),2))
for ( i in 1:mf)
{
  posl=c(na.omit(c(logl[,i])))
  gabpos=c(posl,posknot)
  if (mf==1) posfix=gabpos else posfix=gabpos[duplicated(c(posl,posknot))]
  while ((anyDuplicated(posfix))!=0)
  {
    posfix=posfix[duplicated(posfix)]
  }
}

```

```

}
pos2=which(pos==posfix)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,length(posfix)-pos2))
xyplot=gab11[posfix[posbawah:posatas],c(1,3+i)]
xyplot=xyplot[order(xyplot[,2]),]
gcvplot=xyplot[,1];
lambdaplot=xyplot[,2]

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("Plot_ 1 knot, k=",kf,"lambda ke ",i,"var fourier ",comvari))
}
#save plot GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
dev.off()
par(mfrow=c(1,1))

#test
#lambdaplot=gab11[posknot,4]
#gcvplot=gab11[posknot,1]
#par(mfrow=c(3,2))

#plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=past
e("knot1 optimum k=",kf))

#membuat matrix x untuk estimasi selanjutnya
lambda1=dataprint[1,c(4:(4+mf-1))]
knotgcv=matrix(dataprint[1,(4+mf+1):ncol(dataprint)],nrow=1)
for (j in 1:ncol(knot1))
{
  b=ceiling(j/3)
  for (k in 1:n)
  {
    if (dataA[k,b]<knotgcv[j]) data1[k,j]=0 else data1[k,j]=dataA[k,b]-knotgcv[j]
  }
}
X=cbind(satu,dataA,data1)

list(D=D,knot=knotgcv,mingcv=dataprint[1,1],Rsqgcv=dataprint[1,2],W=W,X=X,lam
bda=lambda1,msegcv=dataprint[1,3])
}

GCV_kom=function(data,kf,name,xknot,mf,mt)
{
  #fungsi GCV untuk kombinasi knot
  #data adalah data yang digunakan
  #kf adalah nilai k yang digunakan
  #name adalah nama folder untuk menyimpan output

```

```

# xknot adalah titik knot pada GCV 1,2 dan 3
#mf adalah banyanya variabel fourier
#mt adalah banyanya variabel spline

#kf= number of k
options(digits=6)
#mf=2 #banyaknya variabel fourier
#mt=2 #banyaknya variabel spline
mp=ncol(data)-(1+mf+mt)#banyaknya variabel parametrik
m1=mt

data=as.matrix(data)
y=as.matrix(data[,1]) #inisiasi vektor y
x=as.matrix(data[,-1])
n=nrow(y)
m=ncol(x)
dataA=as.matrix(x[(m+1-mt):m]) #var non Par
F=diag(n)
xknot=as.matrix(xknot)
m=0

#mencari titik titik kombinasi
a=loop(m1)$a

#menginisiasi nilai titik titik lambda
temp1=c()
for ( i in 1:12)
{
  temp0=seq((10^(-(1+i))),10^(-(i)),by=(2*10^(-(2+i))))
  temp1=c(temp1,temp0)
}
lambda1=as.matrix(sort(unique(c(seq(0.1,1,by=0.01),temp1))))
# lambda1=as.matrix(c(seq(10^(-9),10^(-6),by=0.00000002),seq(10^(-6),10^(-3),by=0.000002),seq(10^(-3),10^-2,by=0.0002))))
nl=length(lambda1)
a3=((3^m1)-3)

#membuat matrix kosong untuk nilai GCV,MSE,Rsq,SSE,SST,SSR
Rsq=matrix(nrow=((3^m1)-3),ncol=nl)
GCV=matrix(ncol=nl,nrow=((3^m1)-3))
MSE=matrix(ncol=nl,nrow=((3^m1)-3))
SSE=matrix(ncol=nl,nrow=((3^m1)-3))
SSR=matrix(ncol=nl,nrow=((3^m1)-3))
SST=matrix(ncol=nl,nrow=((3^m1)-3))
lambda=matrix(ncol=nl);colnames(GCV)<-lambda1;colnames(MSE)<-lambda1;colnames(Rsq)<-lambda1
for(i in 1:((3^m1)-3))
{

```

```

lambda=rbind(lambda,t(lambda1))
}
lambda=lambda[-1,]
kkkkom=matrix(nrow=((3^m1)-3),ncol=3*m1)

#persamaan deret fourier
xfou=as.matrix(x[,1:mf])
W=matrix(nrow=n)
D=matrix(0,ncol=1,nrow=1)
for (i in (1:mf))
{
  der=funksik(kf,xfou[,i])
  W=cbind(W,der$W)
  D=blkdiag(D,der$D)
}
W=as.matrix(W[,-1])
D=as.matrix(D[-1,-1])
ma=0

for (i in 1:((3^m1)-3))
{
  im=0
  for(i2 in 1:m1)
  {
    #menghitung nilai knot kondisional mengikuti kombinasi
    for (h in 1:1)
    if (a[i,i2]==1)
    {
      gab=as.matrix(xknot[i2,1])
      gen=as.matrix(dataA[,i2])
      aa=matrix(nrow=n,ncol=1)
      for (j in 1:1)
      for (w in 1:n)
      if (gen[w,j]<gab[h,j]) aa[w,j]=0 else aa[w,j]=gen[w,j]-gab[h,j] #menghitung
knot
    }
    else
    if (a[i,i2]==2)
    {
      gab=as.matrix(xknot[i2,2:3]) ;gab=t(gab)
      gen=as.matrix(cbind(dataA[,i2],dataA[,i2]))
      aa=matrix(nrow=n,ncol=2)
      for (j in 1:2)
      for (w in 1:n)
      if (gen[w,j]<gab[h,j]) aa[w,j]=0 else aa[w,j]=gen[w,j]-gab[h,j]

    }
    else

```

```

{
  gab=as.matrix(xknot[i2,4:6]);gab=t(gab)
  gen=as.matrix(cbind(dataA[,i2],dataA[,i2],dataA[,i2]))
  aa=matrix(nrow=n,ncol=3)
  for (j in 1:3)
    for (w in 1:n)
      if (gen[w,j]<gab[h,j]) aa[w,j]=0 else aa[w,j]=gen[w,j]-gab[h,j]
}

if (im==0) {ma=aa;im=1} else {ma=cbind(ma,aa)}
}
satu=rep(1,n)
X=cbind(satu,dataA,na.omit(ma))
#X=cbind(satu,dataA,dataA^2,na.omit(ma))
I1=diag(ncol(X))
I2=diag(nrow(X))
for (j in 1:nl)
{
  #menghitung nilai estimasi
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambda[i,j]*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1)%*%B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)
  C=W)%*%A1+X)%*%B3
  yhat=C)%*%y# mencari nilai yhat
  SSE[i,j]=sum((y-yhat)^2)#mencari SSE
  SSR[i,j]=sum((yhat-mean(y))^2)#mencari SSR
  SST[i,j]=SSR[i,j]+SSE[i,j]#mencari SST
  Rsq[i,j]=(SSR[i,j]/(SST[i,j]))*100#mencari R square
  MSE[i,j]=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n#mencari MSE
  GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
  GCV[i,j]=MSE[i,j]/GCVbwh##mencari GCV
}
#menggabungkan knot kombinasi dengan titik kombinasi
kkk=matrix(nrow=1,ncol=3*m1)
for (i3 in 1:m1)
{
  if (a[i,i3]==1)
  {s=xknot[i3,1];
  ns1=length(s);
  kkk[1,(3*i3-2):((3*i3-2)+ns1-1)]=s
  }else
  if (a[i,i3]==2)
  {s=xknot[i3,2:3]
  ns1=length(s);
  kkk[1,(3*i3-2):((3*i3-2)+ns1-1)]=s
  }else

```

```

    {s=xknot[i3,4:6]
    ns1=length(s);
    kkk[1,(3*i3-2):((3*i3-2)+ns1-1)]=s}
  }
  kkk=as.matrix(kkk)
  ckkk=length(kkk)
  kkk=t(kkk)
  kkkkom[i,1:ckkk]=kkk
}

#menyiapkan output sort GCV terkecil
R11=matrix(Rsq,ncol=1); colnames(R11)<-"Rsq"
L11=matrix(lambda,ncol=1); colnames(L11)<-"Lambda"
MSE11=matrix(MSE,ncol=1); colnames(MSE11)<-"MSE"
GCV11=matrix(GCV,ncol=1); colnames(GCV11)<-"GCV"
ke11=matrix(rep(1:a3,nl),ncol=1); colnames(ke11)<-"Kombinasi Knot ke"
knot11=matrix(nrow=(a3*nl),ncol=ncol(kkkkom))
n1=nrow(GCV)
nprint=(min(10,n1))
for (i in 1:nl)
{ knot11[(i*a3-(a3-1)):i*a3,]=(kkkkom) }
gab11=cbind(GCV11,R11,MSE11,L11,ke11,knot11)
gab11copy=gab11
dataprint=matrix(nrow=nprint,ncol=ncol(gab11copy)) #gcv, Rsq, mse, lambda,
knot
for (i in 1:nprint)
{
  s1=min(gab11copy[,1])
  pos=which(s1==gab11copy[,1])
  if (length(pos)==1) pos=pos else pos=randsample(pos,1)
  dataprint[i,]=gab11copy[pos,]
  posdellambda=which(gab11copy[pos,4]==gab11copy[,4])
  posdelknot =which(gab11copy[pos,5]==gab11copy[,5])
  gab11copy=gab11copy[-c(posdellambda,posdelknot),]
}
dataprint=dataprint[order(dataprint[,1],-dataprint[,2],dataprint[,3],dataprint[,5]),]
dataprint1=as.matrix(dataprint[,1]);colnames(dataprint1)<-"GCV"
dataprint2=as.matrix(dataprint[,2]);colnames(dataprint2)<-"Rsq"
dataprint3=as.matrix(dataprint[,3]);colnames(dataprint3)<-"MSE"
dataprint4=as.matrix(dataprint[,4]);colnames(dataprint4)<-"Lambda"
dataprint5=as.matrix(dataprint[,5]);colnames(dataprint5)<-"knot_ke"

dataprint=cbind(dataprint1,dataprint2,dataprint3,dataprint4,dataprint5,dataprint[,
6:ncol(dataprint)])

#save hasil menggunakan file csv
write.csv(gab11,file=paste(name,"output data All kombinasi knot k=",kf,".csv"))

```

```

write.csv(dataprint,file=paste(name,"output data yang di print kombinasi knot
k=",kf,".csv"))
#print output
cat("=====", "\n")
cat("HASIL GCV terkecil dengan fourier-Spline kombinasi knot k=",kf," \n")
cat("=====", "\n")
cat("GCV   =",dataprint[1,1], "\n")
cat("Rsquare =",dataprint[1,2], "\n")
cat("MSE    =",dataprint[1,3], "\n")
cat("Lambda =",dataprint[1,4], "\n")
cat("Kombinasi Knot   =",a[dataprint[1,5],], "\n")
cat("Knot   =",dataprint[1,6:ncol(dataprint)], "\n")
cat("Nilai GCV ", "\n")
print(dataprint)

#membuat plot antara GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
pos=which((min(gab11[,1])==gab11[,1])&(dataprint[1,5]==gab11[,5]))
#pos=which((min(gab11[,1])==gab11[,1]))
posknot =which(dataprint[1,5]==gab11[,5])
pos2=which(pos==posknot)
posbawah=pos2-(min(10,pos2))+1
posatas=pos2+(min(10,length(posknot)-pos2))
lambdaplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],4]
gcvplot=gab11[posknot[posbawah:posatas],1]

#save plot GCV vs Lambda pada posisi lambda optimum
mypath <- file.path(paste(name,"plot_knot kombinasi K=",kf,".jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=1104)

plot((lambdaplot),gcvplot,col="red",ylab="GCV",xlab="lambda",type='b',main=paste
("Plot_ knot kombinasi, k=",kf))
dev.off()

#membuat matrix x untuk estimasi selanjutnya
com=as.matrix(a[dataprint[1,5],])
com=t(com)
im=0
for(i2 in 1:m1)
{
  for (h in 1:1)
    if (com[i2]==1)
    {
      gab=as.matrix(xknot[i2,1])
      gen=as.matrix(dataA[i2])
      aa=matrix(nrow=n,ncol=1)
      for (j in 1:1)
        for (w in 1:n)
          if (gen[w,j]<gab[h,j]) aa[w,j]=0 else aa[w,j]=gen[w,j]-gab[h,j]
    }
  }
}

```

```

    }
  else
    if (com[,i2]==2)
    {
      gab=as.matrix(xknot[i2,2:3]) ;gab=t(gab)
      gen=as.matrix(cbind(dataA[,i2],dataA[,i2]))
      aa=matrix(nrow=n,ncol=2)
      for (j in 1:2)
        for (w in 1:n)
          if (gen[w,j]<gab[h,j]) aa[w,j]=0 else aa[w,j]=gen[w,j]-gab[h,j]
    }
  }
  else
  {
    gab=as.matrix(xknot[i2,4:6]);gab=t(gab)
    gen=as.matrix(cbind(dataA[,i2],dataA[,i2],dataA[,i2]))
    aa=matrix(nrow=n,ncol=3)
    for (j in 1:3)
      for (w in 1:n)
        if (gen[w,j]<gab[h,j]) aa[w,j]=0 else aa[w,j]=gen[w,j]-gab[h,j]
  }
}
if (im==0) {ma=aa;im=1} else {ma=cbind(ma,aa)}
}
X=cbind(satu,dataA,na.omit(ma))

list(D=D,knot=dataprint[1,6:ncol(dataprint)],mingcv=s1,Rsqgcv=dataprint[1,2],lam
bda=dataprint[1,4],W=W,X=X,comknot=a[dataprint[1,5],])
}

GCV=function(data,kf,name,mf,mt,comvari1)
{
  #fungsi utama untuk memanggil fungsi yang lain
  #data adalah data yang digunakan
  #kf adalah nilai k yang digunakan
  #name adalah nama folder untuk menyimpan output
  #mf adalah banyanya variabel fourier
  #mt adalah banyanya variabel spline
  #comvari1 adalah nama variabel yang menjadi var fourier

  library(gtools)
  library(pracma)
  cat("\n","Nilai GCV untuk K=",kf,"\n","\n")
  comvari=c()
  for ( i in 1:length(comvari1))
  { comvari=c(paste(comvari,comvari1[i],sep=' ')) }
  G1=GCV1(data,kf,name,mf,mt,comvari)      #running GCV 1 knot
  G2=GCV2(data,kf,name,mf,mt,comvari)      #running GCV 2 knot
  G3=GCV3(data,kf,name,mf,mt,comvari)      #running GCV 3 knot
}

```



```

    #if(mt!=1) { #kondisi ketika hanya ada 1 variabel spline -> knot kombinasi tidak
    akan dirunning

    #knot1k1=cbind(t(matrix((G1$knot),nrow=1)),t(matrix((G2$knot),nrow=2)),t(matrix((G3$knot),nrow=3)))
    ##xknot=as.matrix(knot1k1)
    #Gk=GCV_kom(data,kf,name,xknot,mf,mt) #running knot kombinasi
    #minGCV=min(as.matrix(cbind(G1$mingcv,G2$mingcv,G3$mingcv,Gk$mingcv)))
    #} else {minGCV=min(as.matrix(cbind(G1$mingcv,G2$mingcv,G3$mingcv,10^8)))}

    minGCV=min(as.matrix(cbind(G1$mingcv,G2$mingcv,G3$mingcv,10^8)))
    #mencari nilai GCV minimum dari semua titik knot ( 1 knot, 2 knot, 3 knot )
    k=kf;
    if (minGCV==G1$mingcv) {
      W=G1$W ; X=G1$X;lambd=G1$lambda ;knot1=G1$knot;D=G1$D;ink='1
      knot';comknot=1
    }else if (minGCV==G2$mingcv) {
      W=G2$W ; X=G2$X;lambd=G2$lambda ;knot1=G2$knot;D=G2$D;ink='2
      knot';comknot=2
    }else if (minGCV==G3$mingcv) {
      W=G3$W ; X=G3$X;lambd=G3$lambda ;knot1=G3$knot;D=G3$D;ink='3
      knot';comknot=3
    } else {
      W=Gk$W ; X=Gk$X;lambd=Gk$lambda ;knot1=Gk$knot;D=Gk$D;ink='knot
      Kombinasi';comknot=Gk$comknot}

    #print output
    cat("=====", "\n")
    cat("Nilai GCV terkecil dengan fourier-Spline ", "\n")
    cat("=====", "\n")
    cat("GCV      = ",minGCV, "\n")
    cat("knot      = ",ink, "\n")
    cat("Titik Knot = ",knot1, "\n")
    cat("Lambda    = ",lambda, "\n")
    cat("k         = ",k, "\n")
    cat("fourier   = ",comvari, "\n")

    cat("\n")
    estim=estimasi(data,X,W,D,lambda,k,name,comknot,mf,mt,comvari) #running
    estimasi setelah titik knot dan lambada optimum diketahui
    C=estim$C ; res=estim$res ; Rsq=estim$Rsq ; yhat=estim$yhat

    mypath <- file.path(paste(name,"plot_1 y yhat, K=",kf," var fourier ",comvari,".jpg",
    sep = ""))
    jpeg(file=mypath,width=1104,height=694)
    par(mfrow=c((ceiling(5/2)),2))
    graf(data,yhat)
    dev.off()

```

```

par(mfrow=c(1,1))

#
table0=matrix(nrow=3,ncol=17) #knotke,gcv,rsq,mse,lambda,knot..
table0[1:3,1]=c(1:3)
table0[1:3,2]=c(G1$mingcv,G2$mingcv,G3$mingcv)
table0[1:3,3]=c(G1$Rsqgcv,G2$Rsqgcv,G3$Rsqgcv)
table0[1:3,4]=c(G1$msegcv,G2$msegcv,G3$msegcv)
#table0[1:3,5]=c(G1$lambda,G2$lambda,G3$lambda)
table0[1:3,5]=c(unlist(lapply(list(G1$lambda),paste,collapse='
')),unlist(lapply(list(G2$lambda),paste,collapse='
')),unlist(lapply(list(G3$lambda),paste,collapse=' ')))
table0[1,6:(length(G1$knot)+5)]=G1$knot
table0[2,6:(length(G2$knot)+5)]=G2$knot
table0[3,6:(length(G3$knot)+5)]=G3$knot
list(table0=table0)
}

estimasi=function(data,X,W,D,lambda,k,name,comknot,mf,mt,comvari)
{
  #fungsi estimasi
  #data adalah data yang digunakan
  # X, W, D, lambda adalah nilai X, W, D, dan lambda pada GCV terkecil
  #k adalah nilai k yang digunakan
  #name adalah nama folder untuk menyimpan output
  #comknot adalah kombinasi knot yang optimum
  #mf adalah banyanya variabel fourier
  #mt adalah banyanya variabel spline
  #comvari adalah nama variabel yang menjadi var fourier

  #mf=2 #banyaknya variabel fourier
  #mt=2 #banyaknya variabel spline
  mp=ncol(data)-(1+mf+mt)
  m1=mt

  #inisiasi nama baris pada beta
  name1=""
  for ( i in 1:mf)
  {name0=c(paste0('b',i),paste0(paste0('a',rep(i,((ncol(W)/mf)-1))),c(0:k)))
  name1=c(name1,name0)}
  name1=name1[-1]
  name2=paste0('beta',c(0:mp))
  name3=paste0('psi',c(1:mt))
  if (length(comknot)==1) comknot=rep(comknot,mt) else comknot=comknot
  name14=""
  for ( i in 1:length(comknot))
  {
    name04=paste0('alfa',i,c(1:comknot[i]))

```

```

    name14=c(name14,name04)
  }
  name4=name14[-1]
  namer=c(name1,name2,name3,name4)

  data=as.matrix(data)
  y=as.matrix(data[,1]);colnames(y)<-"y" #inisiasi vektor y
  n=nrow(y)
  X=as.matrix(X)
  W=as.matrix(W)
  D=as.matrix(D)
  I1=diag(ncol(X))
  I2=diag(nrow(X))

  #menghitung nilai estimasi
  lambdaA=matrix(ncol=1)
  for (k in 1:mf)
  {
    lambdaA=cbind(lambdaA,matrix(c(rep(lambda[k],(ncol(D)/mf))),nrow=1))
  }
  lambdaA=lambdaA[,-1]
  Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambdaA*D)
  #Sk=pinv(t(W)%*%W+n*lambda*D)
  B1=pinv(I1-(pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%W)%*%Sk)%*%t(W)%*%X))
  B2=pinv(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%(I2-W)%*%Sk)%*%t(W))
  B3=B1*B2
  A1=Sk)%*%t(W)%*%(I2-X)%*%B3)

  estim_alfa=A1)%*%y #estimasi deret fourier
  estim_beta=B3)%*%y #estimasi spline
  C=W)%*%A1+X)%*%B3
  yhat=C)%*%y;colnames(yhat)<-"yhat"      # mencari nilai yhat
  SSE=sum((y-yhat)^2)#mencari SSE
  SSR=sum((yhat-mean(y))^2)#mencari SSR
  SST=SSR+SSE#mencari SST
  Rsq=(SSR/(SST))*100#mencari R square
  MSE=(t(y)%*%t(I2-C)%*%(I2-C)%*%y)/n#mencari MSE
  GCVbwh=sum(diag(I2-C))/n
  GCV=MSE/GCVbwh##mencari GCV
  res=y-yhat;colnames(res)<-"residual"      #mencari residual
  cat("\n")
  cat("\n")
  #menggabungkan estimasi deret fourier dan spline
  B=matrix(rbind(matrix(estim_alfa,ncol=1),matrix(estim_beta,ncol=1)))
  n1=length(B)
  colnames(B)<-"  estimasi_parameter"
  MSR=SSR/(n1-1) #mencari nilai MSR

```

```

#uji F (uji serentak)
Fhit=MSR/MSE
pvalue=pf(Fhit,(n1-1),(n-n1),lower.tail=FALSE)

#uji t (uji individu)
predic=cbind(W,X)
thit=rep(NA,n1)
pval=rep(NA,n1)
MSE=as.numeric(MSE)
SE=sqrt(diag(MSE*(pinv(t(predic)%*%predic))))#mencari nilai SE koefisien
for (i in 1:n1)
{
  thit[i]=B[i,1]/SE[i]
  pval[i]=2*(pt(abs(thit[i]),(n-n1),lower.tail=FALSE))
}
thit=as.matrix(thit)
colnames(thit)<-"t_hitung"
colnames(B)<-"parameter_beta"

#print output
#tg1=cbind(B,thit,pval);
tg1=B;
rownames(tg1)<-namer
cat("=====", "\n")
cat("Estimasi Parameter", "\n")
cat("=====", "\n")
print(tg1)
cat("\n")
cat("Analysis of Variance", "\n")
cat("=====", "\n")
cat("Source   ", "df", "\t", "SS   ", "\t", "\t", "MS", "\t", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Regression ", (n1-1), "\t", "SSR", "\t", "MSR", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Error      ", n-n1, "\t", "SSE", "\t", "MSE", "\n")
cat("Total     ", n-1, "\t", "SST", "\n")
cat("=====", "\n")
cat("s=", sqrt(MSE), " Rsq=", Rsq, "\n")
cat("pvalue(F)=", pvalue, "\n")
predic=cbind(W,X)
predic1=cbind(y,yhat,res)

#save hasil estimasi
write.csv(tg1,file=paste(name,"estimasi_parameter k=",k," var fourier",
",comvari",".csv"))
write.csv(predic,file=paste(name,"estimasi_matriks_W_dan_X k=",k," var fourier",
",comvari",".csv"))
write.csv(predic1,file=paste(name,"estimasi_y,yhatdan residual k=",k," var fourier",
",comvari",".csv"))
#write.csv(C,file=paste(name,"estimasi_C k=",k," .csv"))

```

```

list(matx=predic,res=res,yhat=yhat,C=C,Rsq=Rsqr,B=B,X=X,W=W,MSE=MSE)
}

fungsik=function(k,xfour)
{#fungsi untuk mencari D dan W pada fourier
  fou1=as.matrix(xfour)
  n=length(fou1)
  fou2=rep(0.5,length(xfour))
  fouk=matrix(ncol=k,nrow=nrow(fou1))
  for (i in 1:k)
  { fouk[,i]=cos(i*(fou1*(2*pi)/n)) }
  # { fouk[,i]=cos(i*fou1) }
  W=cbind(fou1,fou2,fouk)
  cc=mat.or.vec(nc=1,nr=k+2)
  cc[1]=0;cc[2]=0
  for (i in 1:k)
  { cc[i+2]=i^4 }
  D=diag(cc)
  list(D=D,W=W)
}

loop=function(n)
{
  #fungsi untuk mencari kombinasi nilai knot
  #n adalah banyaknya variabel yang akan dikombinasikan

  #mencari kombinasi yang mungkin.
  a=matrix(ncol=n,nrow=3^(n))
  for (i in 1:n)
  {
    a[,i]=rep(c((rep(1,3^(n-i))),rep(2,3^(n-i))),rep(3,3^(n-i))),3^(i-1))
  }
  aa=matrix(ncol=1,nrow=3)

  #menghilangkan kombinasi yang sama
  for(i in 1:3)
  {
    for(j in 1:(3^(n)))
    {
      if (all(a[j,]==i)) aa[i,]=j
    }
  }
  a=a[-aa,]
  list(a=a)
}

graf=function(data,yhat)
{

```

```

x=data[,-1]
y=data[,1]
m=ncol(x)
a=paste0("x",c(1:m))
for (i in 1:m)
{
  name=paste("y dan yhat vs ",a[i])
  dat=cbind(x[,i],y,yhat)
  dat=dat[order(dat[,1]),]
  x1=dat[,1]
  y=dat[,2]
  yhat=dat[,3]
  plot(x1,y,ylim=range(c(y,yhat)),col="black",ylab="",xlab="")
  par(new=TRUE)
  plot(x1,yhat,main=(name),ylim=range(c(y,yhat)),col="red",ylab="y",xlab=a[i])
}
}

```

Lampiran 21. Data Riil

No	y	x1	x2	x3	x4	No	y	x1	x2	x3	x4
1	6823	1090	161.4	25.1	7	29	19121	4702	320.5	29.1	3.8
2	8123	1241	245.4	27.4	5.1	30	17105	5010	315.5	28.5	4.2
3	8053	1190	235.2	27.5	6.5	31	6479	1085	269.7	25.6	9.4
4	8114	1201	240.2	27.1	6.1	32	6398	1046	231.5	27.2	7.5
5	7900	1101	168.4	26.3	4.6	33	5202	1105	161.2	29.8	5.2
6	7132	1145	165.2	26.5	2.7	34	7521	1120	218.5	30.2	6.1
7	9009	1305	212.3	28.2	3.4	35	9941	2690	280.1	30.5	7.5
8	9110	1301	270.2	28.5	2.4	36	8621	2212	245.2	26.4	9.1
9	9125	1326	256.1	29.1	5.6	37	7656	2021	168.1	28.5	8.1
10	8050	1162	239.4	27.2	7.3	38	9862	3561	190.5	24.9	8.5
11	7214	1136	170.6	29.5	8.1	39	6692	996	160.5	29.8	6.2
12	9050	1421	189.2	30.2	9.2	40	7863	2036	166.2	25.6	8.5
13	8121	1221	178.5	28.3	7.5	41	8672	1345	248.1	27.2	6.2
14	7351	1141	182.2	29.9	6.3	42	7268	1326	280.3	25.7	8.8
15	8235	1345	190.4	30.1	7.4	43	4212	1056	250.2	29.3	9.4
16	13745	3745	290.5	28.3	4.2	44	8768	1736	176.4	27.4	8.6
17	12675	3425	297.5	29.3	3.5	45	8152	2325	214.8	28.2	7.8
18	16561	4211	299.4	28.2	4.6	46	3886	632	148.5	30	9.5
19	14650	3850	298.6	29.3	3.4	47	2465	521	150.4	30.2	9.8
20	10212	3685	202.3	30.1	7.4	48	2337	411	161.5	30.3	9.6
21	13256	3565	276.1	28.5	4.4	49	1080	311	155.1	30.6	10.1
22	17991	4112	309.4	29.5	4.5	50	6213	1998	251.5	30.1	2.1
23	15521	4012	301.5	28.3	4.7	51	7421	1431	268.5	29.8	3.2
24	11200	2998	291.4	29.2	4.6	52	8533	2515	274.6	29.1	4.5
25	15770	4242	298.3	29.2	4.8	53	6345	1031	174.5	30.5	4.9
26	19121	4202	315.1	29.3	4.2	54	8341	3163	168.4	27.4	4.3
27	20212	4325	325.2	28.6	3.6	55	10145	2994	203.4	28.1	3.5
28	18061	4702	302.5	28.2	4.5	56	9231	3261	268.5	27.5	4.2
						57	10241	3363	274.3	28.6	4.1

Lampiran 23 Tabel 6.4 (a) dan (b) GCV Minimum Model Gabungan Dua Prediktor Spline Truncated dan Dua Prediktor Deret Fourier

Tabel 6.4(a)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Spline X_1, X_3 , Deret Fourier X_2, X_4	$t_1 = 1165,36$	$K = 1$	$t_1 = 25,94$	$K = 1$	1158422,48
	$t_2 = 3301,27$		$t_2 = 28,53$		
	$t_3 = 4582,82$		$t_3 = 30,08$		
Spline X_1, X_3 , Deret Fourier X_2, X_4	$t_1 = 3541,56$	$K = 2$	$t_1 = 28,82$	$K = 2$	1388701,39
	$t_2 = 4422,63$		$t_1 = 29,98$		
Spline X_1, X_3 , Deret Fourier X_2, X_4	$t_1 = 1165,36$	$K = 1$	$t_1 = 25,94$	$K = 2$	1158135,65 (*)
	$t_2 = 3301,27$		$t_2 = 28,53$		
	$t_3 = 4582,82$		$t_3 = 30,08$		
Spline X_1, X_3 , Deret Fourier X_2, X_4	$t_1 = 3541,56$	$K = 3$	$t_1 = 28,82$	$K = 3$	1393120,44
	$t_2 = 4422,63$		$t_2 = 29,98$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Spline X_1, X_3 , Deret Fourier X_2, X_4	$t_1 = 3202,69$	$K = 2$	$t_1 = 28,41$	$K = 3$	1848843,14

Tabel 6.4(b)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Spline X_1, X_4 , Deret Fourier X_2, X_3	$t_1 = 3247,88$	$K = 3$	$K = 3$	$t_1 = 7,10$	1142864,47
	$t_2 = 4422,63$			$t_2 = 9,10$	
Spline X_1, X_4 , Deret Fourier X_2, X_3	$t_1 = 1165,36$	$K = 1$	$K = 2$	$t_1 = 3,55$	1098288,92 (*)
	$t_2 = 3301,27$			$t_2 = 7,19$	
	$t_3 = 4582,82$			$t_3 = 9,37$	
Spline X_1, X_4 , Deret Fourier X_2, X_3	$t_1 = 3247,88$	$K = 1$	$K = 1$	$t_1 = 7,10$	1142201,81
	$t_2 = 4422,63$			$t_2 = 9,10$	
Spline X_1, X_4 , Deret Fourier X_2, X_3	$t_1 = 3202,69$	$K = 1$	$K = 2$	$t_1 = 7,02$	1874123,07
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Spline X_1, X_4 , Deret Fourier X_2, X_3	$t_1 = 1165,36$	$K = 3$	$K = 1$	$t_1 = 3,55$	1098321,77
	$t_2 = 3301,27$			$t_2 = 7,19$	
	$t_3 = 4582,82$			$t_3 = 9,37$	

Lampiran 24 Tabel 6.4 (c) dan (d) GCV Minimum Model Gabungan Dua Prediktor Spline Truncated dan Dua Prediktor Deret Fourier

Tabel 6.4(c)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Spline X_2, X_3 , Deret Fourier X_1, X_4	$K = 3$	$t_1 = 196,69$	$t_1 = 26,45$	$K = 2$	108096,06 (*)
		$t_2 = 228,82$	$t_2 = 27,49$		
		$t_3 = 277,01$	$t_3 = 29,05$		
Spline X_2, X_3 , Deret Fourier X_1, X_4	$K = 1$	$t_1 = 181,63$	$t_1 = 25,57$	$K = 1$	1097844,18
		$t_2 = 269,68$	$t_2 = 28,82$		
Spline X_2, X_3 , Deret Fourier X_1, X_4	$K = 2$	$t_1 = 196,69$	$t_1 = 26,45$	$K = 2$	1043451,72
		$t_2 = 228,82$	$t_2 = 27,49$		
		$t_3 = 277,01$	$t_3 = 29,05$		
Spline X_2, X_3 , Deret Fourier X_1, X_4	$K = 1$	$t_1 = 277,63$	$t_1 = 29,07$	$K = 3$	1365587,52
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Spline X_2, X_3 , Deret Fourier X_1, X_4	$K = 3$	$t_1 = 181,63$	$t_1 = 25,97$	$K = 3$	1088858,13
		$t_2 = 269,68$	$t_2 = 28,82$		

Tabel 6.4(d)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Spline X_2, X_4 , Deret Fourier X_1, X_3	$K = 2$	$t_1 = 196,69$	$K = 2$	$t_1 = 4,28$	983876,63
		$t_2 = 228,82$		$t_2 = 5,74$	
		$t_3 = 277,01$		$t_3 = 7,92$	
Spline X_2, X_4 , Deret Fourier X_1, X_3	$K = 3$	$t_1 = 281,03$	$K = 3$	$t_1 = 8,10$	1104082,44
		$t_2 = 303,11$		$t_2 = 9,10$	
Spline X_2, X_4 , Deret Fourier X_1, X_3	$K = 2$	$t_1 = 284,42$	$K = 1$	$t_1 = 8,25$	1255307,84
Spline X_2, X_4 , Deret Fourier X_1, X_3	$K = 1$	$t_1 = 196,69$	$K = 2$	$t_1 = 4,28$	983168,34 (*)
		$t_2 = 228,82$		$t_2 = 5,74$	
		$t_3 = 277,01$		$t_3 = 7,92$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Spline X_2, X_4 , Deret Fourier X_1, X_3	$K = 1$	$t_1 = 281,03$	$K = 1$	$t_1 = 8,10$	1103270,45
		$t_2 = 303,11$		$t_2 = 9,10$	

Lampiran 6.4. Tabel 6.4 (c) GCV Minimum Model Gabungan Dua Prediktor Spline Truncated dan Dua Prediktor Deret Fourier

Tabel 6.4 (e)

Model Gabungan	<u>Variabel Prediktor</u>				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Spline X_3, X_4 , <u>Deret</u> Fourier X_1, X_2	$K = 2$	$K = 2$	$t_1 = 25,42$	$t_1 = 2,83$	983876,63
			$t_2 = 27,49$	$t_2 = 5,74$	
			$t_3 = 28,01$	$t_3 = 6,64$	
Spline X_3, X_4 , <u>Deret</u> Fourier X_1, X_2	$K = 3$	$K = 3$	$t_1 = 25,26$	$t_1 = 2,60$	262059,62
			$t_2 = 29,53$	$t_2 = 8,60$	
Spline X_3, X_4 , <u>Deret</u> Fourier X_1, X_2	$K = 2$	$K = 1$	$t_1 = 95,12$	$t_1 = 2,41$	2739970,42
Spline X_3, X_4 , <u>Deret</u> Fourier X_1, X_2	$K = 3$	$K = 1$	$t_1 = 25,42$	$t_1 = 2,83$	2723689,20
			$t_2 = 27,49$	$t_2 = 5,74$	
			$t_3 = 28,01$	$t_3 = 6,46$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Spline X_3, X_4 , <u>Deret</u> Fourier X_1, X_2	$K = 1$	$K = 2$	$t_1 = 25,26$	$t_1 = 2,60$	26000959,49 (*)
			$t_2 = 29,53$	$t_2 = 8,60$	

Lampiran 24 Tabel 6.5 (a) dan (b) GCV Minimum Model Gabungan Satu Prediktor Deret Fourier dan Tiga Prediktor Spline Truncated

Tabel 6.5 (a)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Deret Fourier X_2 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 3247,88$	$K = 3$	$t_1 = 28,46$	$t_1 = 7,10$	1134419,67
	$t_2 = 4422,63$		$t_2 = 29,89$	$t_2 = 9,10$	
Deret Fourier X_2 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 1165,36$	$K = 2$	$t_1 = 25,94$	$t_1 = 3,55$	1123949,39 (*)
	$t_2 = 3301,27$		$t_2 = 28,53$	$t_2 = 7,19$	
	$t_3 = 4582,82$		$t_3 = 30,08$	$t_3 = 9,37$	
Deret Fourier X_2 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 3202,69$	$K = 1$	$t_1 = 28,41$	$t_1 = 7,02$	1882878,05
Deret Fourier X_2 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 1165,36$	$K = 3$	$t_1 = 25,94$	$t_1 = 3,55$	1123959,03
	$t_2 = 3301,27$		$t_2 = 28,53$	$t_2 = 7,19$	
	$t_3 = 4582,82$		$t_3 = 30,08$	$t_3 = 9,37$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Deret Fourier X_2 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 3247,88$	$K = 2$	$t_1 = 28,46$	$t_1 = 7,10$	1134322,57
	$t_2 = 4422,63$		$t_2 = 29,89$	$t_2 = 9,10$	

Tabel 6.5 (b)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Deret Fourier X_3 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 3247,88$	$t_1 = 958,94$	$K = 2$	$t_1 = 7,10$	853583,70
	$t_2 = 4422,63$	$t_2 = 303,11$		$t_2 = 9,10$	
Deret Fourier X_3 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 32925,62$	$t_1 = 284,42$	$K = 1$	$t_1 = 8,25$	1248373,86
Deret Fourier X_3 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 1592,55$	$t_1 = 196,69$	$K = 3$	$t_1 = 4,28$	69570,74 (*)
	$t_2 = 3301,27$	$t_2 = 260,95$		$t_2 = 7,19$	
	$t_3 = 4582,82$	$t_3 = 309,14$		$t_3 = 9,37$	
Deret Fourier X_3 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 3247,88$	$t_1 = 259,94$	$K = 1$	$t_1 = 7,10$	853665,02
	$t_2 = 4422,63$	$t_2 = 303,11$		$t_2 = 9,10$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Deret Fourier X_3 Spline X_1, X_2, X_4	$t_1 = 1592,55$	$t_1 = 196,69$	$K = 2$	$t_1 = 4,28$	695847,54
	$t_2 = 3301,27$	$t_2 = 260,95$		$t_2 = 7,19$	
	$t_3 = 4582,82$	$t_3 = 309,14$		$t_3 = 9,37$	

**Lampiran 25 Tabel 6.5 (c) GCV Minimum Model Gabungan Satu Prediktor
Deret Fourier dan Tiga Prediktor Spline Truncated**

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
<u>Deret Fourier</u> X_4 Spline X_1, X_2, X_3	$t_1 = 1592,55$	$t_1 = 196,69$	$t_1 = 26,45$	$K = 1$	685828,72 (*)
	$t_2 = 3301,97$	$t_2 = 260,95$	$t_2 = 28,53$		
	$t_3 = 4582,82$	$t_3 = 309,14$	$t_3 = 30,08$		
<u>Deret Fourier</u> X_4 Spline X_1, X_2, X_3	$t_1 = 1485,75$	$t_1 = 192,68$	$t_1 = 26,33$	$K = 2$	936296,81
	$t_2 = 3247,88$	$t_2 = 258,94$	$t_2 = 28,46$		
<u>Deret Fourier</u> X_4 Spline X_1, X_2, X_3	$t_1 = 3744,88$	$t_1 = 277,63$	$t_1 = 29,07$	$K = 3$	1227420,72
<u>Deret Fourier</u> X_4 Spline X_1, X_2, X_3	$t_1 = 1592,55$	$t_1 = 196,69$	$t_1 = 26,45$	$K = 2$	687766,01
	$t_2 = 3301,97$	$t_2 = 260,95$	$t_2 = 28,53$		
	$t_3 = 4582,82$	$t_3 = 309,14$	$t_3 = 30,08$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
<u>Deret Fourier</u> X_4 Spline X_1, X_2, X_3	$t_1 = 1485,75$	$t_1 = 192,68$	$t_1 = 26,33$	$K = 1$	933306,20
	$t_2 = 3247,88$	$t_2 = 258,94$	$t_2 = 28,46$		

Lampiran 25 Tabel 6.6 (a) dan (b) GCV Minimum Model Gabungan Tiga Prediktor Deret Fourier dan Satu Prediktor Spline Truncated

Tabel 6.6 (a)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_2 , X_4 Spline X_3	$K = 3$	$K = 2$	$t_1 = 26,45$	$K = 1$	2701488,71 (*)
			$t_2 = 27,49$		
			$t_3 = 28,53$		
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_2 , X_4 Spline X_3	$K = 2$	$K = 2$	$t_1 = 26,45$	$K = 2$	2704512,97
			$t_2 = 27,49$		
			$t_3 = 28,53$		
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_2 , X_4 Spline X_3	$K = 1$	$K = 1$	$t_1 = 29,50$	$K = 1$	2773723,70
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_2 , X_4 Spline X_3	$K = 3$	$K = 3$	$t_1 = 25,26$	$K = 3$	2773723,70
			$t_2 = 29,53$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_2 , X_4 Spline X_3	$K = 2$	$K = 1$	$t_1 = 27,75$	$K = 2$	275900,81
			$t_2 = 28,48$		

Tabel 6.6 (b)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_3 , X_4 Spline X_2	$K = 1$	$t_1 = 181,63$	$K = 1$	$K = 1$	1060195,89
		$t_2 = 269,98$			
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_3 , X_4 Spline X_2	$K = 3$	$t_1 = 196,99$	$K = 2$	$K = 1$	977554,91 (*)
		$t_2 = 228,86$			
		$t_3 = 277,01$			
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_3 , X_4 Spline X_2	$K = 2$	$t_1 = 181,63$	$K = 2$	$K = 2$	1073825,02
		$t_2 = 269,98$			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
<u>Deret Fourier</u> X_1 , X_3 , X_4 Spline X_2	$K = 2$	$t_1 = 196,99$	$K = 1$	$K = 2$	982944,97
		$t_2 = 228,86$			
		$t_3 = 277,01$			

Lampiran 6.6. Tabel 6.6 (c) GCV Minimum Model Gabungan Tiga Prediktor Deret Fourier dan Satu Prediktor Spline Truncated

Tabel 6.6 (c)

Model Gabungan	Variabel Prediktor				GCV
	X_1	X_2	X_3	X_4	
Deret Fourier X_2 , X_3, X_4 Spline X_1	$t_1 = 196,99$	$K = 3$	$K = 3$	$K = 2$	1141132,74
	$t_2 = 228,86$				
	$t_3 = 277,01$				
Deret Fourier X_2 , X_3, X_4 Spline X_1	$t_1 = 3541,56$	$K = 2$	$K = 2$	$K = 2$	1370518,86
	$t_2 = 4422,63$				
Deret Fourier X_2 , X_3, X_4 Spline X_1	$t_1 = 1165,36$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 2$	1137752,20
	$t_2 = 3301,27$				
	$t_3 = 4582,82$				
Deret Fourier X_2 , X_3, X_4 Spline X_1	$t_1 = 3202,69$	$K = 3$	$K = 1$	$K = 1$	1888562,58
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Deret Fourier X_2 , X_3, X_4 Spline X_1	$t_1 = 3541,56$	$K = 3$	$K = 3$	$K = 2$	1373351,67
	$t_2 = 4422,63$				

RIWAYAT PENELITIAN



A. Identitas Diri

1	Nama	I Wayan Sudiarsa
2	NIP	196208021991031002
3	NIDN	0018046013
4	NRP	1312301001
5	Tempat/Tgl Lahir	Gianyar, 18 April 1960
6	Alamat Rumah	Jl. Raya Silakarang, Singapadu Kaler Sukawati, Gianyar, Bali
7	Instansi/Alamat	L2Dikti Bali, dan NTB Dpk pada IKIP PGRI Bali Jl. Seroja Tonja, Denpasar Timur, Bali
8	No. Telp / HP	081999171323 / 082144063700
	Rumah	0361-8988118
	Kantor	0361-431434
9	Email	wsudiarsa72@yahoo.com
10	Tgl. Masuk	3 September 2012
11	Tgl. Kualifikasi	20 Mei 2014

B. Latar Belakang Pendidikan

No	Nama Pendidikan	Jurusan/Bidang	Tahun Lulus
1	SD N 1 Silakarang Gianyar	-	1973
2	ST N 1 Sedang Abiansema Badung	Bangunan Gedung	1976
3	STM N 1 Denpasar	Bangunan Gedung	1979
4	Sarjana S1 (Drs) Jurusan Pendidikan Matematika F.P. MIPA Unmas Denpasar	Pendidikan Matematika	1984
5	Pra Pasca Sarjana S2 IPB (Institut Pertanian Bogor)	Statistika	2000
6	Magister of Sains S2 (M.Si) Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya	Statistika	2002

C. Pengalaman Penelitian / Publikasi 5 Tahun Terakhir

No	Judul	Tahun	Publikasi
1	<i>Simulations Study Combined Estimator Fourier Series and Truncated Spline in Multivariable Nonparametric Regression</i>	2018	The Journal of Model Assisted Statistics and Applications, submit, 27 Februari 2018
2	Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Multivariabel menggunakan Estimator Gabungan deret fourier dan spline <i>truncated</i>	2016	Hibah Disertasi Doktor
3	<i>Combined Estimator Fourier Series and Spline Truncated in Multivariable Nonparametric Regression</i>	2015	Applied Mathematical Sciences, Vol.9, No.100, 4997-5010 Hikari Ltd
4	Pendekatan Fungsi Trigonometri Deret Fourier pada Regresi Non Linier	2014	Jurnal EMASAINS F.P. MIPA IKIP PGRI Bali
5	Perbandingan Metode PLS dan PCA Dalam Regresi Cox untuk Mengatasi Tidak Terpenuhi Asumsi Multikolinearitas	2013	Jurnal Pendidikan Widyadari, IKIP PGRI Bali
6	Perbandingan Pengklasifikasian Antara Regresi Logistik dan Support Vektor Machine (SPM) Studi Kasus Diagnosis Pasien Kanker	2013	Jurnal Edukasi Matematika dan Sains (EMASAINS) F.P. MIPA IKIP PGRI Bali
7	Penggunaan Model Regresi Cox Dengan Time Dependent Variabel untuk Mengatasi Nonproporsional Hazard	2012	Jurnal EMASAINS F.P. MIPA IKIP PGRI Bali
8	Perbandingan Metode Saringan Erastotenes, Teorema Kecil Format dan Teorema Wellson	2012	Jurnal EMASAINS F.P. MIPA IKIP PGRI Bali

No	Judul	Tahun	Publikasi
9	Penggunaan Alat Peraga Sebagai Alat Bantu Pemahaman Konsep Pecahan	2011	Jurnal Pendidikan Widyadari IKIP PGRI Bali
10	Pengaruh Penerapan Model Pembelajaran ECIRR Terhadap Prestasi Belajar Matematika Peserta Didik SMPN Gianyar	2010	Penelitian DPP-SPP Kopertis Wilayah VIII Bali, NTB, NTT

D. Pengalaman Pengabdian kepada Masyarakat 5 Tahun Terakhir

No	Bentuk Kegiatan / Judul	Tahun	Tempat
1	Bakti sosial dalam rangka wisuda Sarjana IKIP PGRI Bali, memberikan penyuluhan Pada Ibu PKK di Kecamatan Baturiti Kabupaten Tabanan	2017	Desa Perean, Kecamatan Baturiti, Kabupaten Tabanan Bali
2	Ramah Tamah Mahasiswa baru FPMIPA IKIP PGRI Bali, memeberikan ceramah pada karang teruna pancakanti Desa Blakuih, Kecamatan Abiansemal, Kabupaten Badung	2016	Desa Blahkiuh, Kecamatan Abiansemal, Kabupaten Badung
3	Memberikan penyuluhan pada STT Widya Dharma, dalam rangka bakti sosial Wisuda sarjana IKIP PGRI Bali di Desa Manukaya, Kecamatan Tampaksiring, Kabupaten Gianyar Bali	2015	Desa Manukaya, Kecamatan Tampaksiring, Kabupaten Gianyar Bali
4	Bakti sosial dalam rangka wisuda Sarjana IKIP PGRI Bali, memberikan ceramah : penelitian tindakan kelas bagi guru SMP di Kecamatan Dawan Klungkung	2014	Desa Pikat, Kecamatan Dawan, Kabupaten Klungkung
5	Bakti sosial dalam rangka wisuda Sarjana IKIP PGRI Bali, memberikan ceramah : peranan STT dalam pembangunan bangsa dan negara	2013	Desa Muncan, Kecamatan Karangasem, Kabupaten Karangasem
6	Ramah Tamah Mahasiswa Baru FPMIPA IKIP PGRI Bali, memberikan pengobatan/kesehatan gratis pada masyarakat di Kecamatan Tegallalang	2013	Desa Gria Sakti, Manuaba, Perean, Kecamatan Tegallalang Kabupaten Gianyar.

No	Bentuk Kegiatan / Judul	Tahun	Tempat
7	Bakti Sosial dalam rangka wisuda Sarjana IKIP PGRI Bali, Bahaya Narkoba, HIV dan AIDS pada Sekehe Teruna-Teruni di Desa Gerih Kecamatan Abiansemal	2012	Desa Gerih, Kecamatan Abiansemal, Kabupaten Badung
8	Ramah Tamah dan Bakti Sosial mahasiswa Baru FP MIPA IKIP PGRI Bali, Bedah Rumah dan memberikan penyuluhan pada Murid SD di Desa Sangeh.	2012	Desa Sangeh, Kecamatan Petang Kabupaten Badung
9	Bakti Sosial dalam rangka Wisuda Sarjana IKIP PGRI Bali, memberikan ceramah pada Guru SD di Denpasar Selatan, Penulisan Buku Ajar	2011	Desa Pedungan, Kecamatan Denpasar Selatan, Kota Madya Denpasar.
10	Ramah Tamah dan Bakti Sosial Mahasiswa Baru FP MIPA IKIP PGRI Bali, memberikan pelatihan tentang karya tulis PTK, Baji guru SD di Kecamatan Pejeng	2011	Desa Petulu, Kecamatan Pejeng, Kabupaten Gianyar.
11	Bakti Sosial dalam rangka Wisuda Sarjana IKIP PGRI Bali : memberikan ceramah-ceramah, peranan koperasi dalam meningkatkan ekonomi pedesaan.	2010	Desa Tembuku, Kecamatan Tembuku, Kab. Bangli

E. Pengalaman Penyampaian Makalah Secara Oral Pada Pertemuan/Seminar Ilmiah Dalam 5 Tahun Terakhir

No	Nama Pertemuan Ilmiah/Seminar	Judul Artikel Ilmiah	Waktu dan Tempat
1	Seminar Internasional 2016	“Simulation Study Combined Estimator Fourier Series and Spline Truncated in Multivariate Nonparametric Regression”	18 Oktober 2016 (ITS Surabaya)
2	Seminar Nasional UNUD 2016	“Studi Simulasi Estimator Deret Fourier Non trend pada Regresi Nonparametrik Multivariabel Aditif”	8 Oktober 2016 (UNUD Denpasar)

No	Nama Pertemuan Ilmiah/Seminar	Judul Artikel Ilmiah	Waktu dan Tempat
3	Seminar Internasional “The 3 rd IndoMs International Conference On Mathematics and its Applications Which is Held” 2015	“Spline Truncated Estimator in Multivariable Additive Nonparametric Regressions,”	3-4 November 2015 (Universitas Indonesia, Depok Indonesia)
4	Seminar Internasional SEAMS UGM 2015	“Multivariable Additive Nonparametric Regressions Curva Estimations to Use Nontrend Fourier Series Estimator”	18-21 Agustus 2015. (Universitas Gajah Mada, Yogyakarta, Indonesia)
5	Seminar Internasional ICSM 2014	“Nonparametrik Curve Regression Estimations to use Non-trend Fourier Series Estimator”	27-28 November 2014 (Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya)
6	Seminar Internasional IHDN 2014	“Politics on Religion and Spirituality”	14 Nopember 2014 (IHDN Denpasar Bali)
9	Seminar Nasional PGRI 2013	“Pengembangan Bahan Ajar Kurikulum 2013”	31 Agustus 2013 (IKIP PGRI Bali)
10	Seminar Nasional IKIP 2012	“Optimalisasi Lingkungan Menuju Pembelajaran yang ENASE”	21-22 Juli 2012 (IKIP Saraswati Tabanan Bali)
11	Seminar Internasional ICSMA 2012	“Spline Linier Estimator in Nonparametric Multivariabel”	19-21 November 2012 (Held in Bali Indonesia)

F. Karya Buku Dalam 5 Tahun Terakhir

No	Judul Buku	Tahun	Jumlah Halaman	Penerbit
1	“Pengantar Dasar Matematika”	2017	66	Tidak Diterbitkan
2	“Statistika Matematika I”	2016	147	Tidak Diterbitkan

Semua data yang saya isikan dan tercantum dalam biodata ini adalah benar dan dapat dipertanggungjawabkan secara hukum. Apabila di kemudian hari ternyata dijumpai ketidaksesuaian dengan kenyataan, saya sanggup menerima sanksi. Demikian biodata ini saya buat dengan sebenarnya untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam pengajuan Hibah Penelitian Disertasi Doktor.

Surabaya, 16 Juli 2018
Pengusul,

Drs. I Wayan Sudiarsa, M.Si
NIP. 196208021991031002